

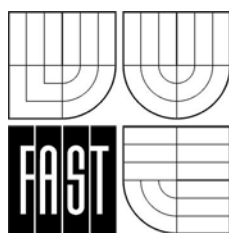
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

OTAKAR ŠVÁBENSKÝ, ALEXEJ VITULA, JIŘÍ BUREŠ

INŽENÝRSKÁ GEODÉZIE I

GE16 MODUL 01

ZÁKLADY INŽENÝRSKÉ GEODÉZIE



STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

OBSAH

1 Úvod.....	5
1.1 Cíle.....	5
1.2 Požadované znalosti.....	5
1.3 Doba potřebná ke studiu.....	5
1.4 Klíčová slova.....	5
2 Předmět inženýrské geodézie.....	7
2.1 Úkoly inženýrské geodézie.....	7
2.2 Historický přehled.....	7
3 Základní pojmy.....	11
4 Model geodetické úlohy.....	15
5 Charakteristiky přesnosti, intervaly spolehlivosti.....	17
5.1 Charakteristiky přesnosti vytyčení.....	17
5.2 Intervaly spolehlivosti.....	17
5.3 Střední elipsa chyb a její parametry.....	17
6 Rozbory přesnosti vytyčení.....	21
6.1 Obecné zásady rozborů přesnosti.....	21
6.2 Požadavky přesnosti vytyčení.....	24
6.3 Rozbory přesnosti před měřením.....	25
6.4 Rozbory přesnosti při měření (vytyčení).....	29
6.5 Rozbory přesnosti po měření.....	29
7 Měření a vytyčování základních veličin.....	33
7.1 Měření a vytyčování úhlů.....	33
7.1.1 Systematické vlivy při měření úhlů.....	33
7.1.1.1 Přístrojové systematické vlivy.....	33
7.1.1.2 Vlivy vnějšího prostředí.....	34
7.1.1.3 Centrační chyby.....	34
7.1.2 Náhodné vlivy při měření úhlů.....	37
7.1.3 Metodika rozboru přesnosti vytyčování úhlů.....	37
7.1.4 Vytyčení úhlu s požadovanou přesností.....	39
7.2 Měření a vytyčování délek.....	39
7.2.1 Metodika vytyčování délek.....	39
7.2.2 Mechanické vytyčení délky.....	40
7.2.3 Elektronické vytyčení délky.....	44
7.2.4 Vytyčení délky paralaktickou metodou.....	45
7.3 Měření a vytyčování výšek.....	51
7.3.1 Vytyčení výšky nivelací.....	51
7.3.2 Vytyčení výšky trigonometricky.....	53
7.3.3 Základní výškové vytyčovací úlohy.....	54
8 Vytyčování přímk, kolmic a rovnoběžek.....	59
8.1 Jednoduché metody.....	59
8.1.1 Jednoduché vytyčování přímek.....	59

8.1.2	Jednoduché vytyčování kolmic	59
8.1.3	Jednoduché vytyčování rovnoběžek.....	60
8.2	Vytyčení přímký s požadovanou přesností.....	61
8.2.1	Vytyčení mezilehlého bodu přímký	62
8.2.2	Vytyčení bodu v prodloužení přímký.....	64
9	Vytyčení svislice	67
9.1	Vytyčení svislice mechanickým provážením	67
9.2	Vytyčení svislice optickým promítáním.....	67
9.3	Vytyčení svislice optickým provažováním	68
10	Metodika vytyčování horizontální polohy	71
10.1	Zákony souhrnného hromadění chyb	71
10.2	Základní metody vytyčení polohy bodu	76
10.3	Vytyčení polohy bodu polárními souřadnicemi (rajonem)	77
10.4	Vytyčení polohy bodu směrovým protínáním	78
10.4.1	Vytyčení polohy bodu protínáním vpřed z orientovaných směrů	78
10.4.2	Vytyčení polohy bodu protínáním vpřed z úhlů.....	80
10.5	Vytyčení polohy bodu délkovým protínáním.....	81
10.6	Vytyčení polohy bodu protínáním z úhlu a délky	83
10.7	Vytyčení polohy bodu protínáním zpět	84
10.8	Porovnání základních metod vytyčení polohy	86
10.9	Jiné metody vytyčení polohy	90
10.9.1	Vytyčení polohy bodu volným polygonovým pořadem.....	90
10.9.2	Vytyčení polohy bodu pravoúhlými souřadnicemi	95
10.9.3	Vytyčení polohy bodu průsečíkovým způsobem	97
10.9.4	Vytyčení polohy bodu pomocí GNSS.....	99
11	Závěr	101
11.1	Shrnutí	101
11.2	Studijní prameny	101
11.2.1	Seznam použité literatury	101
11.2.2	Seznam doplňkové studijní literatury.....	102
11.2.3	Odkazy na další studijní zdroje a prameny	102

1 Úvod

1.1 Cíle

Cílem tohoto studijního textu je seznámit čtenáře se základními problémy inženýrské geodézie. Je to první ze čtyř modulů určených pro předmět GE16 „Inženýrská geodézie I“ na bakalářském stupni studia oboru Geodézie a kartografie na VUT FAST Brno. Má zásadní důležitost pro další orientaci, neboť jsou zde obecně vysvětleny základy rozborů přesnosti úloh inženýrské geodézie. Na tento modul navazuje druhý s názvem „Geodézie ve stavebnictví“. Oba tyto moduly pokrývají přednášenou tematiku. Na ně navazují další dva moduly – třetí a čtvrtý s názvy „Návody ke cvičením“ a „Praktické úlohy inženýrské geodézie“, které jsou určeny pro semestrální cvičení a jsou zaměřeny na praktické procvičení dané problematiky formou řešených příkladů a úloh.



1.2 Požadované znalosti

Ke studiu je třeba znalost středoškolské matematiky a fyziky, zejména základů geometrie a základních metod matematické analýzy, zejména diferenciálního počtu. Dále je třeba znát základy rovinné (nižší) geodézie a dobře se orientovat v základech teorie chyb. Rovněž se předpokládá alespoň základní znalost obsluhy geodetických přístrojů.



1.3 Doba potřebná ke studiu

Doba potřebná ke zvládnutí látky předmětu "Inženýrská geodézie I" odpovídá rozsahu výuky 3 hodiny přednášek a 3 hodiny cvičení týdně po dobu 13 týdnů. Jedná se tedy přibližně o 60 hodin. Z toho na studium tohoto modulu připadá o něco více než jedna třetina, tedy odhadem asi 25 – 30 hodin. Je nutné počítat s tím, že čas potřebný ke studiu se může dosti značně individuálně lišit.



1.4 Klíčová slova

inženýrská geodézie, stavební geodézie, rozborů přesnosti, vytyčovací metody, kontrolní a ověřovací měření.



2 Předmět inženýrské geodézie

Inženýrská geodézie je oborem zabývajícím se teorií a uplatněním geodézie ve všech fázích investiční výstavby od přípravy, projektování a realizace staveb až do vyhotovení dokumentace skutečného provedení staveb a monitorování geometrických parametrů stavebních objektů a technických zařízení během jejich provozu.



2.1 Úkoly inženýrské geodézie

Inženýrská geodézie poskytuje teoretický i metodický základ pro řešení nejrůznějších úloh v investiční výstavbě a průmyslu. Náročnost těchto prací se zvyšuje s postupující industrializací stavebnictví a rostoucím podílem montáže, mechanizace, automatizace a robotizace. Ve srovnání s jinými obory geodézie je možné charakterizovat inženýrskogeodetické práce jako měření běžné až vysoké přesnosti v relativně malém rozsahu (staveniště).

Metody inženýrské geodézie jsou schopny poskytovat informace o prostorové poloze objektů a jejich změnách v daném prostředí a čase. K tomu využívají jak klasických ověřených měřících postupů, tak novějších moderních technologií jako jsou družicové (GNSS) metody, laserové skenování, inerciální metody aj.

Charakteristickým rysem geodeta pracujícího ve výstavbě je *interdisciplinární charakter* jeho činnosti, kdy se musí umět dorozumět s odborníky různých stavebních profesí, musí se orientovat v projektové dokumentaci staveb, v příslušných technických normách a předpisech apod.

Významnou skutečností je též stálá *osobní zodpovědnost* za výsledky své práce, což znamená kromě ovládnutí své odbornosti také základní právní znalosti. Výsledky své práce je třeba předávat formou protokolárního záznamu s podpisy zúčastněných stran a zamezit tak možným právním komplikacím při odstraňování vad při výstavbě.

Samozřejmým zájmem kvalitního stavebního geodeta by mělo být *průběžné další vzdělávání*, sledování odborného tisku a udržování kontaktu s odborníky své profese v rámci odborných a vědeckých seminářů a konferencí. Důležité je též sledování vývoje měřících technologií a přístrojové techniky.

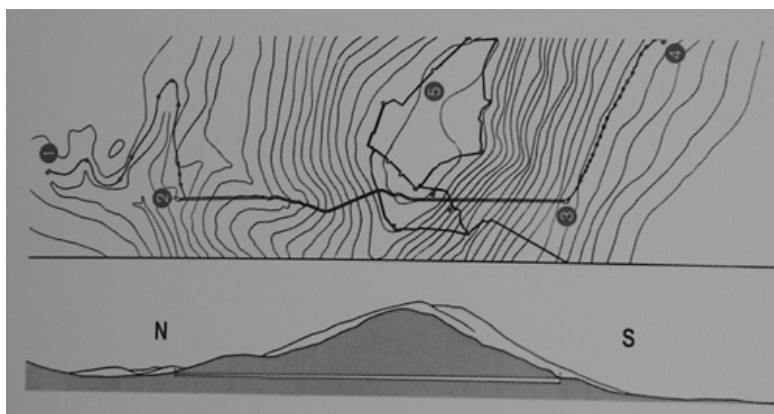
2.2 Historický přehled

Geodézie provází výstavbu již od samého počátku. Důkazy o tom je možné nalézt již ve starověku. Je zřejmé, že velké starověké stavby vyžadovaly použití poměrně dokonalých vytyčovacích postupů při tehdejší úrovni měřicí techniky. Uvedme dva příklady:

- *egyptské pyramidy* – jsou důkazem, že již v tehdejší době existovaly přesné postupy pro vytyčování dlouhých přímků, pravých úhlů, astronomických azimutů a pro přesné vytyčování výškových úrovní. Příkladem může posloužit Chufevova (řec. Cheopsova) pyramida v Gíze, která byla

vystavěna přibližně r. 2525 př. n. l. jako jehlan s čtvercovou podstavou o stranách ~ 230 m a výšce 146 m. Přesné proměření této pyramidy vykonal r. 1921 německý archeolog a zeměměřič Borchardt. Přitom vyšly najevo pozoruhodné skutečnosti: odchylky délek stran se pohybují okolo 0,1 m, max. odchylka pravouhlosti je menší než 0,07 gon, max. výškový rozdíl základů pyramidy je 12 mm a azimutální odchylka směru obou jejích stran od astronomického severu je menší než 0,05 gon. Kromě toho směr chodby vycházející z pohřební komory na povrch je přesně severní, což mohlo být zajištěno pouze vytyčením pomocného orientačního bodu vzdáleného ~ 0,5 km za použití astronomické orientace.

- *vodovodní štola na ostrově Samos* – jedná se o důlní dílo ražené napříč horským masivem, pocházející ze 6. století př. n. l. , o délce 1040 m a příčném profilu 1,8 x 1,8 m (Obr. 1). Výstavba takového díla nebyla možná bez pokročilých matematických a geometrických znalostí. Tento zachovaný tunel byl r. 1882 proměřen německým archeologem Fabriciem, další přesná měření byla uskutečněna v sedmdesátých letech minulého století. Přitom byla zjištěna maximální odchylka přímosti ± 6 m, což odpovídá směrové odchylce $\pm 0,7$ gon.



Obr. 1 - Vodovodní štola na ostrově Samos

V novější době se postupy inženýrské geodézie zdokonalovaly při realizaci velkých a významných staveb (Suezský průplav, Panamský průplav, alpské silniční a železniční tunely, železniční tunel pod kanálem La Manche aj.).

Inženýrská geodézie se vymezila jako samostatný obor geodézie v době po II. světové válce, kdy nastala rozsáhlá celosvětová obnova válkou poničeného ekonomického potenciálu. Do ní byly zahrnuty geodetické činnosti spojené s přípravou, projektováním, realizací a sledováním inženýrských staveb a technických objektů.

Na území tehdejšího Československa se jednalo rovněž o rozsáhlou obnovu hospodářství, o výstavbu nových podniků, o industrializaci slovenské části republiky, o výstavbu velkých vodních děl a energetických komplexů, o budování dálkových podzemních vedení (ropovod, plynovod), a v novější době o výstavbu dálniční sítě, o výstavbu pražského metra a zejména o náročnou realizaci staveb jaderných elektrárenských zařízení.

Úkoly spadající do oblasti inženýrské geodézie u nás zajišťovaly v poválečné době složky rezortu geodézie. Zabývaly se jimi též mimorezortní organizace, např. geodetická oddělení projektových a stavebních podniků, střediska železniční geodézie aj. V 50. letech minulého století byla také zavedena výuka samostatného předmětu "Inženýrsko-průmyslová geodézie" a později "Inženýrská geodézie" na ČVUT v Praze – zakladatelem a prvním přednášejícím byl prof. Krumphanzl. Výzkumem v této oblasti se po dlouhou dobu zabýval VÚGTK v Praze (později ve Zdíbech), kde byl významným odborníkem a autorem řady technických norem Ing. Herda.

Do roku 1990 byl obor inženýrské geodézie řízen centrálními orgány geodézie a kartografie spolu s ostatními obory. V současné době je problematika inženýrské geodézie do značné míry ponechána praxi a není centrálně řízena rezortním orgánem ČÚZK.

3 Základní pojmy

V následujícím přehledu jsou uvedeny některé základní pojmy, veličiny a charakteristiky přesnosti používané v inženýrské geodézii při rozbořech přesnosti:

- *geometrický model* měřické (vytyčovací) úlohy je dán vzájemnou konfigurací výchozích (daných) bodů a vytyčovaných bodů, orientací souřadnicové soustavy, počtem měřených (vytyčovaných) veličin a jejich rozmístěním,
- *pravděpodobnostní model* měřické (vytyčovací) úlohy je dán uvažovanou přesností výchozích veličin, uvažovanou přesností měřených veličin, uvažovanými vlivy prostředí,
- *cílový parametr* je kvantitativní (číselný) údaj vyjadřující ve zvolených jednotkách výsledek vytyčení nebo měření (např. délka, úhel, souřadnice, výška, výškový rozdíl atd.) ,
- *základní hodnota* vytyčované veličiny je hodnota uvedená v projektové dokumentaci (vytyčovacím výkresu) ,
- *skutečná hodnota* vytyčené veličiny je hodnota zjištěná kontrolním měřením podle ČSN 73 0212,
- *vytyčovací odchylka* je algebraický rozdíl mezi skutečnou a základní hodnotou vytyčené veličiny,
- *mezní vytyčovací odchylka* je předepsaná hodnota vytyčovací odchylky, která nesmí být překročena,
- *vytyčovací tolerance* je rozdíl mezi oběma mezními vytyčovacími odchylkami, tj. rozmezí povolených nepřesností při vytyčování,
- *podélná odchylka* je odchylka ve směru spojnice bodů, u křivek ve směru tečny v určeném bodě,
- *příčná odchylka* je odchylka v kolmém směru na spojnici bodů, u křivek ve směru normály v určeném bodě,
- *polohová odchylka* je odchylka vytyčeného bodu ve vodorovné rovině , stanovená z odchylek ve dvou navzájem kolmých směrech (buď ve směrech os souřadnicové soustavy nebo v podélném a příčném směru) stanovená jako odmocnina ze součtu jejich čtverců,
- *vnitřní přesnost* měření (vytyčení) je přesnost, při níž se nepřihlíží k těm systematickým chybám, které neporušují rozptyl v řadě měření; charakterizuje ji střední náhodná chyba svědčící o vnitřní přesnosti přístroje a měření, která však není dostatečným měřítkem spolehlivosti měření,
- *vnější přesnost* měření (vytyčení) je přesnost zahrnující vliv náhodných i systematických chyb, posuzuje se podle hodnoty střední úplné chyby,
- *třída přesnosti* měření (vytyčení) zahrnuje skupinu vytyčovacích tolerancí odpovídajících určitému zvolenému stupni přesnosti, jednotlivé

třídy přesnosti jsou charakterizovány kritérii pro základní střední chybu a pro způsob vyznačení vytyčovacíh značek,

- *základní střední chyba* \bar{m} daná předem volbou přístroje, volbou metody okolnostmi vytyčení, prakticky je určena jako střední chyba z rozsáhlého souboru měření,
- *střední empirická chyba* m je charakteristika přesnosti vypočtená z malého souboru měření podle vzorce

$$m^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i v_i}{n-1} \quad (3.1)$$

kde \bar{x} je aritmetický průměr souboru (výběru) a n je rozsah (počet měření) souboru; charakterizuje pouze daný soubor a je pouze odhadem základní střední chyby,

- *střední chyby jednotlivých souřadnic* m_x , m_y jsou charakteristiky přesnosti určení polohy bodu ve směru souřadnicových os, vypočtené podle vzorců

$$m_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n v_{x_i} v_{x_i}}{n-1} \quad (3.2)$$

$$m_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - y_i)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n v_{y_i} v_{y_i}}{n-1}$$

- *kovariance* m_{xy} je veličina charakterizující stupeň vzájemné závislosti (korelace) mezi oběma souřadnicemi x , y vypočtená ze vztahu

$$m_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n v_{x_i} v_{y_i}}{n-1} \quad (3.3)$$

(může nabývat kladných i záporných hodnot, má kvadratický rozměr

stejně jako chyby jednotlivých souřadnic m_x^2 , m_y^2 ,

- *střední polohová chyba* m_p je zjednodušená charakteristika přesnosti určení polohy vypočtená ze vztahu

$$m_p^2 = m_x^2 + m_y^2 \quad (3.4)$$

je nezávislá (invariantní) na změně volby souřadnicové soustavy ,

- *střední souřadnicová chyba* $m_{x,y}$ je charakteristika přesnosti polohy bodu vypočtená ze vztahu

$$m_{x,y}^2 = 0,5 (m_x^2 + m_y^2) = 0,5 m_p^2 \quad (3.5)$$

je rovněž nezávislá (invariantní) na změně volby souřadnicové soustavy,

- *extrémní chyby* m_{max} , m_{min} udávají největší a nejmenší chybu v určení polohy, jejich směry jsou navzájem kolmé a určují směry hlavních poloos střední elipsy chyb,

- *střední elipsa chyb* je elipsa stejné hustoty pravděpodobnosti o poloosách m_{max} , m_{min} , poskytuje komplexní informaci o polohové přesnosti bodu,
- *souhrnná střední chyba* zahrnuje jak vliv chyb výchozích (daných) veličin tak vliv chyb měření (vytyčení),
- *relativní střední chyba* zahrnuje pouze vliv chyb měřených (vytyčených) veličin za předpokladu bezchybnosti výchozích (daných) veličin,
- *střední systematická chyba* m_c zahrnuje vliv zbytkových systematických chyb nevyločených metodou měření nebo vyrovnáním,
- *úplná střední chyba* je dána jako odmocnina ze součtu kvadrátů střední náhodné chyby a střední systematické chyby, vyjadřuje vnější přesnost měření (vytyčení),
- *součinitel konfidence* je faktor, jímž se volí šířka intervalu spolehlivosti (v násobku základní střední chyby) vzhledem ke zvolenému riziku, označuje se t nebo u a volí se obvykle v rozmezí 2 – 3,
- *interval spolehlivosti* je okolí výsledku měření, které se zvolenou pravděpodobností (rizikem) obsahuje hodnotu dané veličiny, vyjadřuje se v násobcích součinitele konfidence a základní střední chyby,
- *poměrná přesnost* je poměr střední chyby určité veličiny m_x k veličině samé ve tvaru $m_x : x$, často se tento poměr převádí na tvar $1 : \mu$.

4 Model geodetické úlohy

Geodetická měření jsou fyzikální povahy a jejich výsledky jsou ovlivňovány mnohočetnými objektivními i subjektivními faktory. Ze zkušenosti je známo, že opakovaná měření nedávají stejné výsledky i při stejné realizaci a zpracování.

Při řešení nějakého fyzikálního problému se z praktických důvodů omezuje na modelová řešení. Model je vždy zjednodušením reality, která je příliš rozmanitá a mnohotvárná. Podle stupně zjednodušení reality pak rozeznáváme různé úrovně přesnosti a spolehlivosti řešení v souladu s přijatým modelem.



Obr. 2 - Model geodetické úlohy

Model geodetické úlohy je tvořen dvěma složkami (Obr. 2) – deterministickou (matematický model) a stochastickou (pravděpodobnostní model):

- *matematický model* zahrnuje veškeré matematické vzorce a algoritmy použité v průběhu výpočtů k získání výsledných hodnot (včetně uvažovaných korekcí systematických vlivů),
- *pravděpodobnostní model* vystihuje stochastické vlastnosti procesu měření (hypotézy o rozdělení pravděpodobností chyb měření, charakteristiky přesnosti měřených a výstupních veličin, odhady vlivů zbytkových systematických chyb nevyložených korekcemi atd.).

Zpřesňování měření znamená změny jak v matematické, tak i v pravděpodobnostní části modelu (jeho zjemnění). Matematický model lze rozšiřovat o další a podrobnější korekce systematických vlivů, pravděpodobnostní model se zjemní volbou přesnější technologie měření, zvyšováním počtu opakování měření atd.

5 Charakteristiky přesnosti, intervaly spolehlivosti

5.1 Charakteristiky přesnosti vytyčení

Přesnost vytyčení je charakterizována směrodatnými odchylkami (středními chybami) cílových parametrů vytyčení.

Kritériem přesnosti vytyčení jsou vytyčovací odchylky. Překročí-li hodnota vytyčovací odchylky předepsanou mez (mezní vytyčovací odchylku), považuje se vytyčení za nevyhovující a musí být provedeno znovu. Hodnoty mezních vytyčovacích odchylek pro různá vytyčení jsou uvedeny v technické normě [9]. V případech, kdy nejsou v této normě odchylky uvedeny, odvodí se tyto z tolerance příslušných cílových parametrů.

5.2 Intervaly spolehlivosti

Interval spolehlivosti měření (vytyčení) je okolí naměřené hodnoty (popřípadě okolí vypočtené nejpravděpodobnější hodnoty), ve kterém s určitou předem zvolenou pravděpodobností leží skutečná (pravá) hodnota měřené veličiny.

a) jednorozměrné chyby (x_i) :

konfidenční interval je úsečka na číselné ose se středem v naměřené hodnotě x a s krajními hodnotami $x - t \cdot m_x$, $x + t \cdot m_x$.

t je součinitel konfidence, volený v hodnotách, kterým odpovídá zvolená pravděpodobnost (riziko), že interval obsahuje (neobsahuje) pravou hodnotu.

b) dvourozměrné chyby (x_i, y_i) :

konfidenční oblast je elipsa o poloosách $t \cdot m_{max}$, $t \cdot m_{min}$.

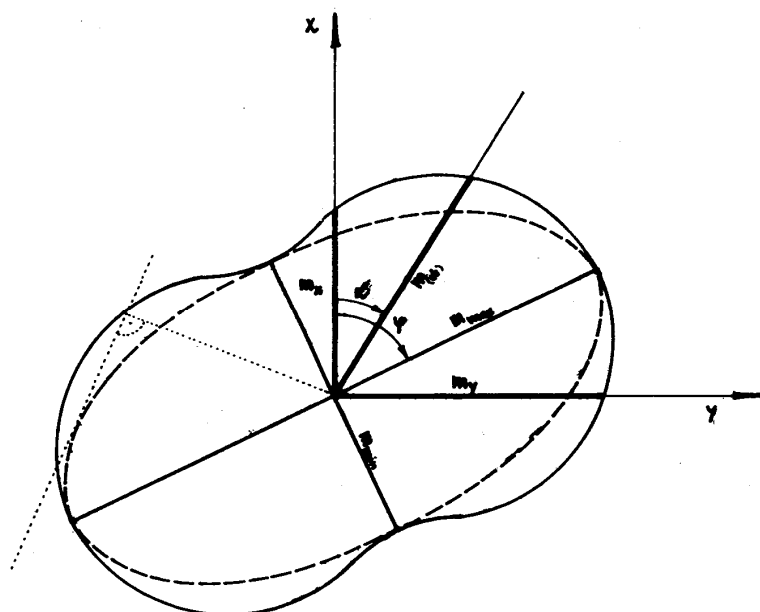
5.3 Střední elipsa chyb a její parametry

Hodnoty středních chyb jednotlivých souřadnic m_x, m_y při polohovém určení bodu charakterizují dosaženou přesnost pouze ve směrech os použité souřadnicové soustavy a neposkytují informaci o rozložení chyb v jiných směrech. Stejnou vlastnost má i střední souřadnicová chyba $m_{x,y}$ (popřípadě střední polohová chyba m_p), která je navíc invariantní (nezávislá) vzhledem k libovolné transformaci vztažné souřadnicové soustavy. Přesto bývá v mnoha případech potřebné zjistit dosaženou přesnost v určitém (kritickém) směru.

To umožňuje teprve znalost kovariance m_{xy} . Střední chyba ve zvoleném směru o směrníku α vzhledem k ose x je pak dána výrazem

$$m^2_{(a)} = m^2_x \cos^2 \alpha + m^2_y \sin^2 \alpha + 2 m_{x,y} \sin \alpha \cos \alpha \quad (5.1)$$

Množina bodů $m_{(a)}$ vyplňuje křivku, která je úpatnicí elipsy chyb



Obr. 3 - Střední elipsa chyb a její úpatnice

Střední elipsa chyb (Obr. 3) poskytuje komplexní informaci o přesnosti polohového určení bodu. Je dána velikostí svých poloos – extrémních chyb m_{max} , m_{min} - a úhlem φ stočení směru hlavní poloosy m_{max} vzhledem k ose x souřadnicové soustavy. Tyto parametry jednoznačně souvisejí s prvky kovarianční matice podle vzorců:

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2m_{xy}}{m_x^2 - m_y^2} \quad (5.2)$$

$$m_{max}^2 = \frac{m_x^2 + m_y^2}{2} + \sqrt{\frac{(m_x^2 - m_y^2)^2}{4} + m_{xy}^2} \quad (5.3)$$

$$m_{min}^2 = \frac{m_x^2 + m_y^2}{2} - \sqrt{\frac{(m_x^2 - m_y^2)^2}{4} + m_{xy}^2} \quad (5.4)$$

Příklad :

Charakteristiky přesnosti polohového určení bodu P ve směrech jednotlivých souřadnicových os jsou $m_x = 0,022 \text{ m}$, $m_y = 0,014 \text{ m}$ a kovariance $m_{xy} = 0,000246 \text{ m}^2$. Stanovte velikosti extrémních chyb m_{max} , m_{min} a směrníku φ hlavní poloosy střední elipsy chyb. Dále vypočtěte velikost střední chyby ve směru $\alpha = 60^\circ$.

Řešení : 1) výpočet extrémních chyb m_{max} , m_{min} ∴:

$$\frac{m_x^2 + m_y^2}{2} = 0,000340 \text{ m}^2$$

$$\sqrt{\frac{(m_x^2 - m_y^2)^2}{4} + m_{xy}^2} = 0,000285 \text{ m}^2$$

$$m_{max}^2 = 0,000340 + 0,000285 = 0,000625 \text{ m}^2$$

$$m_{min}^2 = 0,000340 - 0,000285 = 0,000055 \text{ m}^2$$

a odtud

$$m_{max} = 0,0250 \text{ m} = 25,0 \text{ mm} \quad , \quad m_{min} = 0,0074 \text{ mm}$$

2) výpočet směrníku φ hlavní poloosy střední elipsy chyb :

$$\operatorname{tg} 2 \varphi = \frac{2 \cdot 0,000246}{0,022^2 - 0,014^2} = 1,708 \quad , \quad 2\varphi = 66,3^\circ \quad , \quad \varphi = 33,1^\circ .$$

3) výpočet střední chyby v daném směru α :

$$\alpha = 60^\circ \quad , \quad \sin \alpha = 0,809 \quad , \quad \cos \alpha = 0,588 \quad ,$$

$$m_{(\alpha=60^\circ)}^2 = 0,022^2 \cdot 0,588^2 + 0,014^2 \cdot 0,809^2 + 2 \cdot 0,000246 \cdot 0,809 \cdot 0,588 \quad ,$$

$$m_{(\alpha=60^\circ)}^2 = 0,000529 \text{ m}^2 \quad , \quad m_{(\alpha=60^\circ)} = 0,023 \text{ m} = 23 \text{ mm}$$

6 Rozbory přesnosti vytyčení

Nezbytnou součástí měřických a vytyčovacíh úloh inženýrské geodézie jsou rozbory přesnosti, jejichž účelem je posouzení přesnosti cílových parametrů vytyčení na základě daného geometrického a přijatého pravděpodobnostního modelu úlohy. Jejich význam je dán tím, že požadavky na přesnost jsou ve většině případů striktně vymezeny a jejich splnění je závazné. Při rozbořech přesnosti se zpravidla postupuje tak, že základní rozbor se provede za předpokladu působení pouze náhodných chyb měření, v dalších fázích se pak rozbor zpřesňuje zohledněním dalších systematických vlivů.

6.1 Obecné zásady rozborů přesnosti

Metody rozborů přesnosti jsou buď *analytické* (založené na aplikaci zákona přenášení středních chyb) nebo *empirické* (simulační metody apod.) . Nejčastěji se používá analytických metod ; použití simulačních metod je účelné v těch případech, kdy je funkční závislost složitá a analytická řešení je těžkopádné a komplikované.

a) analytická metoda

Cílový parametr vytyčení a je funkcí (analyt.) n měřených (vytyčovaných) veličin x_i

$$a = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (6.1)$$

Skutečná náhodná chyba je podle příslušného zákona hromadění

$$\varepsilon_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_i} \varepsilon_{x_i} \quad (6.2)$$

a střední náhodná chyba je

$$m_a^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial x_i} \right)^2 m_{x_i}^2 \quad (6.3)$$

Poznámka : Zákon přenášení středních chyb platí v tomto tvaru pouze za předpokladu vzájemně nezávislých (nekorelovaných) měření x_i .

V případě dvojice parametrů a, b (např. dvojice souřadnic x, y udávající horizontální polohu vytyčeného bodu ve zvolené soustavě souřadnic) je pak též dvojice určujících funkcí

$$\begin{aligned} a &= f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad , \\ b &= g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad . \end{aligned}$$

Střední chyby jednotlivých parametrů jsou dány vzorci

$$m_a^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial x_i} \right)^2 m_{x_i}^2 \quad , \quad m_b^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial b}{\partial x_i} \right)^2 m_{x_i}^2 \quad . \quad (6.4)$$

Kovariance se vypočítá ze vzorce

$$m_{ab} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial b}{\partial x_i} m_{x_i}^2 \quad (6.5)$$

Poznámka : Vzorec pro výpočet kovariance platí v tomto tvaru pouze za předpokladu vzájemně nezávislých (nekorelovaných) měřených veličin x_i .

Příklady na použití zákona hromadění středních chyb (6.3) jsou v hojném počtu uváděny v řadě učebnic (viz. např. [15] , [16] , [17] , aj.) . V následujícím příkladě je ukázáno použití vzorce (2.7) pro výpočet střední smíšené chyby (kovariance).

Příklad :

Odvod'te výraz pro výpočet kovariance) m_{xy} mezi oběma souřadnicemi x, y bodu vytyčeného polárními souřadnicemi (viz. obr. 18) , jsou-li výchozí data bezchybná a uvažuje-li se pouze přesnost vlastního vytyčení.

Řešení:

Souřadnice bodu vytyčeného polárními souřadnicemi jsou dány vzorci

$$x = x_A + s \cos \alpha \quad , \quad y = y_A + s \sin \alpha \quad .$$

Za předpokladu $m_{x_A} = m_{y_A} = 0$ jsou střední chyby jednotlivých souřadnic podle (2.6)

$$m_x^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 m_s^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 m_\alpha^2 = \cos^2 \alpha m_s^2 + s^2 \sin^2 \alpha m_\alpha^2$$

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 m_s^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 m_\alpha^2 = \sin^2 \alpha m_s^2 + s^2 \cos^2 \alpha m_\alpha^2$$

Kovariance je podle (2.11)

$$m_{xy} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} m_s^2 + \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \alpha} m_\alpha^2 = m_{xy} = \sin \alpha \cos \alpha m_s^2 - s^2 \sin \alpha \cos \alpha m_\alpha^2$$

Z uvedeného vyplývá, že i když původní měřené veličiny jsou nezávislé, tak veličiny z nich vypočtené (odvozené) již závislé (korelované) jsou.

Stupeň závislosti (korelace) se měří pomocí korelačního koeficientu r_{ab} , který se počítá ze vzorce

$$r_{ab} = \frac{m_{ab}}{m_a m_b} \quad (6.6)$$

Korelační koeficient může nabývat hodnot v rozmezí $-1 < r_{ab} < 1$. V případě, že $r_{ab} \rightarrow 0$, jsou obě veličiny nezávislé (jde-li o pravouhlé souřadnice, pak jsou osy střední elipsy chyb orientovány souhlasně a osami souřadnicové soustavy), naopak když $|r_{ab}| \rightarrow 1$, jedná se o těsnou závislost (jde-li o pravouhlé souřadnice, a střední elipsa chyb degeneruje v úsečku).

b) metoda simulace

Pomocí zdrojů náhodných čísel s normálním rozdělením pravděpodobností lze uměle vytvářet (kvazi) náhodné „měřické“ chyby. Připojováním takto získaných chyb k bezchybným hodnotám modelových veličin (po příslušné rozměrové transformaci) se získají simulované hodnoty měřených veličin (úhlů, délek atd.). Vyhodnocením opakovaných výpočtů s těmito simulovanými veličinami je pak možné získat odhady charakteristik přesnosti cílových parametrů v závislosti na zvolené vstupní přesnosti měřených veličin. Efektivní použití simulačních metod předpokládá výpočty na počítači, včetně vyhodnocení. Jednodušší experimenty menšího rozsahu lze vykonat i s použitím běžného kalkulátoru.

Simulační schéma konkrétní úlohy lze stručně vyjádřit následujícím postupem :

- 1) vytvoření simulačního modelu a jeho analytické vyjádření (geometrický model s bezchybnými veličinami) ,
- 2) výběr vhodného zdroje náhodných čísel, sestavení plánu a rozsahu simulace, volba velikostí chyb vstupních veličin,
- 3) běh simulačního programu na počítači s průběžným zaznamenáváním výsledků jednotlivých simulačních cyklů,
- 4) statické vyhodnocení získaných souborů výsledných hodnot, výpočet středních chyb jednotlivých cílových parametrů (souřadnic, výšek atd.) , závěrečné zhodnocení výsledků.

Simulační metoda nachází použití zejména při složitých úlohách, které nedovolují snadné odvození vzorců pro střední chyby analytickou metodou. Pro simulace je potřebné mít k dispozici operativní zdroj náhodných čísel. Užívá se dvou způsobů :

- použití daného souboru náhodných čísel,
- použití zvláštního programového tzv. generátoru náhodných čísel .

Takto se získává posloupnost náhodných čísel η_i s normovaným normálním rozdělením. Před použitím je třeba čísla transformovat na „kvazi“ skutečné chyby podle vzorce

$$\varepsilon_{xi} = \eta_i \cdot m_x \quad , \quad (6.7)$$

kde m_x je zvolená vstupní střední chyba měřené veličiny x . Simulace měřených veličin x' se děje podle vztahu

$$x'_i = x + \varepsilon_{xi} \quad , \quad (6.8)$$

kde x je bezchybná modelová hodnota této veličiny. Analytickým výpočtem se pak získá hodnota cílového parametru a' v každém i -tém simulačním cyklu ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), n je zvolený rozsah simulace) podle daného funkčního vztahu

$$a'_i = f(x'_i, y'_i, \dots) \quad . \quad (6.9)$$

Na závěr je k dispozici soubor n hodnot cílového parametru a'_1, a'_2, \dots, a'_n , který lze statisticky zpracovat podobně jako běžný soubor měření, pouze s tím rozdílem, že namísto oprav k aritmetickému průměru se nyní pro odhady středních chyb použije „kvazi“ skutečných chyb.

$$\varepsilon_{a_i} = a - a'_i \quad (6.10)$$

kde a je opět bezchybná modelová hodnota daného parametru. Příslušná střední chyba se vypočte ze vztahu

$$m_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_{a_i} \varepsilon_{a_i}}{n} \quad (6.11)$$

6.2 Požadavky přesnosti vytyčení

Vytyčováním se rozumí souhrn měřických úkonů, jejichž výsledkem je vyznačení (stabilizace) geometrických prvků (bodů, os, rovin, výšek apod.) nezbytných pro výstavbu nebo rekonstrukci podle vypracovaného projektu. Způsob vyznačení musí zajistit jednoznačnost vztažného bodu nebo prvku (nejistota stabilizace vytyčení má být menší než 1/10 příslušné mezní vytyčovací odchylky).

Vytyčování stavebních objektů se dělí na

- a) vytyčení prostorové polohy (umístění vzhledem k vytyčovací síti) ,
- b) podrobné vytyčení (vytyčení detailních rozměrů a tvaru) .

Požadavky na přesnost vytyčení jsou závislé od

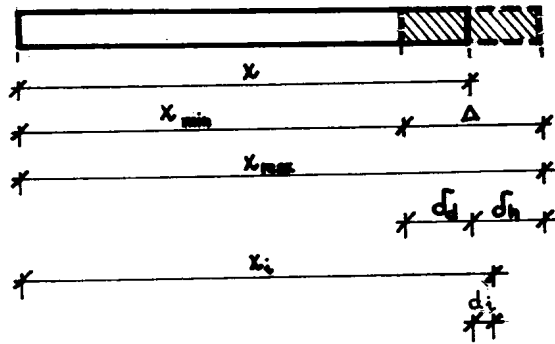
- velikosti a důležitosti stavby,
- funkčních a bezpečnostních požadavků,
- použité stavební technologie,
- požadavků na návaznost a estetický účín.

Faktory ovlivňující skutečnou přesnost vytyčovacích prací jsou

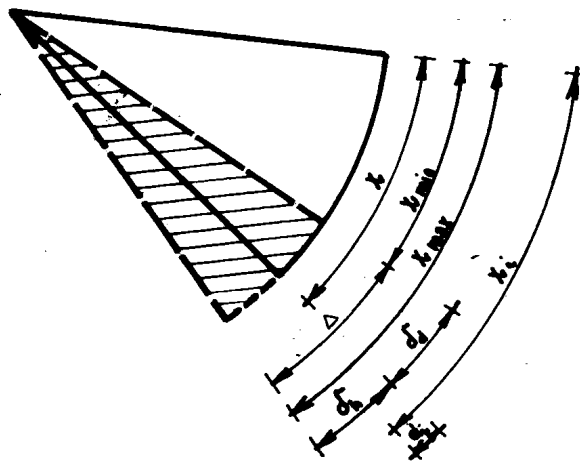
- přesnost výchozích projektových parametrů,
- přesnost a stabilita výchozí vytyčovací sítě,
- technologie měření použitá k vytyčení,
- přístrojové vybavení a osobní vlivy,
- působení vnějších vlivů (stavu prostředí) .

Kritériem kvality vytyčení jsou dosažené vytyčovací odchylky. Je-li překročena hodnota povolené mezní odchylky, považuje se vytyčení za nevyhovující. Hodnoty mezních vytyčovacích odchylek jsou normovány. Požaduje-li se jiná přesnost vytyčení, musí být uvedena ve stavebních projektu spolu s odůvodněním.

Vytyčovací odchylka d_i je algebraický rozdíl mezi dosaženou (skutečnou) hodnotou x_i a základní hodnotou x vytyčované veličiny (délky nebo úhlu – viz. obr. 4 a 5) , δx je mezní vytyčovací odchylka, Δ je tolerance a δx_{met} je mezní chyba kontrolního měření.



Obr. 4 - Rozměr a jeho odchylky



Obr. 5 - Úhel a jeho odchylky

V celém procesu vytyčení je třeba neustále sledovat a analyzovat přesnost ve vztahu k požadované přesnosti cílových parametrů vytyčování. Rozbory přesnosti se dělí na tři fáze :

- rozbory přesnosti před měřením (vytyčování) ,
- rozbory přesnosti při měření,
- rozbory přesnosti po vytyčení (posouzení dosažených výsledků) .

6.3 Rozbory přesnosti před měřením

Rozbor přesnosti před zahájením měření (vytyčování) zahrnuje následující kroky :

- zjištění požadavků na přesnost dílčích a cílových parametrů,
- stanovení středních chyb dílčích a cílových parametrů,
- výběr technologie a prostředků vytyčování (metody a přístrojů) ,
- stanovení střední chyby kontrolního měření,
- výběr technologie a prostředků kontrolního měření (metody a přístrojů) .

Požadavky na přesnost vytyčení jsou stanoveny hodnotami mezních vytyčovací odchytek δx v ČSN 73 0420-2 pro různé typy objektů. Při jiných nárocích na přesnost platí požadavky projektu.

Střední chyba vytyčení (základní) $\overline{m_x}$ se odvodí z požadované mezní odchytky δx podle vzorce

$$\overline{m_x} = \frac{\delta x}{t} \quad (6.12)$$

kde t je součinitel kofidence (obvykle v rozmezí $t = 2 - 3$), který stanoví vytyčovatel s ohledem na ekonomickou závažnost vytyčované hodnoty, možnost její kontroly, uvažovanou metodu měření a možnost vyloučení systematických chyb. Prakticky se volí v hodnotách :

$t = 2$ u jednoduchých a snadno kontrolovatelných vytyčení, kdy lze předpokládat zanedbatelné systematické chyby,

$t = 2,5$ u složitějších vytyčení, délkových a jiných měření obtížněji kontrolovatelných,

$t = 3$ při nepříznivých podmínkách a obtížném vyloučení systematických chyb.

Součinitel kofidence $t = 3$ se používá jen zcela výjimečně u důležitých a ekonomicky velmi závažných vytyčení.

Jestliže cílový parametr a je funkcí několika měřených veličin

$$a = a(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

je třeba zahájením měření ještě vypočítat požadované střední chyby jednotlivých měřických úkonů $\overline{m_{x_1}}$, $\overline{m_{x_2}}$, ..., $\overline{m_{x_n}}$. Postupuje se následovně:

- 1) není-li znám vzájemný poměr přesností jednotlivých úkonů, uplatní se zásada stejného vlivu :

$$\overline{m_{x_i}} \leq \frac{\overline{m_a}^{-2}}{n \left(\frac{\partial a}{\partial x_i} \right)^2} \quad (6.13)$$

- 2) v další fázi se podíly jednotlivých měření upřesňují

- a) stanovením předpokládané velikosti středních chyb několika veličin $\overline{m_{x_1}}$, $\overline{m_{x_2}}$, ..., $\overline{m_{x_k}}$ ($k < n$). Pak se vypočte část připadající na zbylé chyby

$$\overline{m_{a(zb)}}^2 = \overline{m_a}^2 - \sum_{i=1}^k \overline{m_{x_i}}^{-2} \left(\frac{\partial a}{\partial x_i} \right)^2 \quad (6.14)$$

kteřá se pak rozdělí opět podle zásady stejného vlivu

$$m_{x_{k+i}}^{-2} \leq \frac{m_{a(zb)}^{-2}}{(n-k) \left(\frac{\partial a}{\partial x_{k+i}} \right)^2}, \quad (6.15)$$

b) stanovením předpokládaného poměru velikostí jednotlivých vlivů

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x_1} \right)^2 m_{x_1}^{-2} : \left(\frac{\partial a}{\partial x_2} \right)^2 m_{x_2}^{-2} : \dots : \left(\frac{\partial a}{\partial x_n} \right)^2 m_{x_n}^{-2} = A_1 : A_2 : \dots : A_n, \quad (6.16)$$

kdy pro jednotlivé střední chyby platí vztahy

$$m_{x_i}^{-2} \leq \frac{A_i m_a^{-2}}{\sum_{xi} A_i \left(\frac{\partial a}{\partial x_i} \right)^2} \quad (6.17)$$

Složitější vytyčovací úlohy obvykle vyžadují zpracování několika variant rozborů přesnosti pro různé kombinace měřických metod. Často je třeba rozhodnout, zda se požadované přesnosti dosáhne několikanásobným opakováním měření méně přesným přístrojem nebo metodou, nebo se zvolí ekonomicky náročnější přesnější přístroj či metoda. Aplikace postupu bude ukázána na následujícím příkladu:

Příklad :

Je dána mezní odchylka vytyčení relativní výšky $\delta H = 25 \text{ mm}$. K vytyčení byla zvolena metoda trigonometrického měření výšek. Stanovte potřebnou přesnost určení délky $\overline{m_z}$ jakož i odměření výšky přístroje $\overline{m_i}$ a výšky cíle $\overline{m_v}$, je-li $z = 85^\circ$ a $s = 90 \text{ m}$.

Řešení : Střední chyba vytyčení výšky

$$m_H = \delta_H / t = 25 / 2 = 12,5 \text{ mm}.$$

Relativní výška vytyčovaná trigonometricky je dána vztahem

$$H = s \cotg z + i - v,$$

počet měřených veličin $n = 4$ (délka s , zenitový úhel z , výška přístroje i a výška cíle v).

zásada stejného vlivu podle (6.6) :

$$m_s^{-2} \leq \frac{m_H^{-2}}{4 \cot^2 z} = 6,78 * 10^{-4} \text{ m}^2, \quad \overline{m} \leq 0,026 \text{ m} = 26 \text{ mm},$$

$$m_z^{-2} \leq \frac{m_H^{-2} \sin^4 z}{4s^2} = 0,431 * 10^{-8} \text{ rad}^2, \quad \overline{m_z} \leq 0,66 * 10^{-4} \text{ rad} = 42'' ,$$

$$m_i = m_v \leq \frac{m_H^{-2}}{4} = 0,39 * 10^{-4} \text{ m}^2, \quad \overline{m_i} = \overline{m_v} \leq 0,006 \text{ m} = 6 \text{ mm}.$$

výška přístroje i cíle se změří pásmem s přesností $\overline{m}_i = \overline{m}_v = 3 \text{ mm}$. Podle (6.7)

$$\overline{m}_{zb}^2 = \overline{m}_H^2 - \overline{m}_i^2 - \overline{m}_v^2 = 0,0125^2 - 2 * 0,003^2 = 1,38 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

a dále dle zásady stejného vlivu

$$\overline{m}_s^2 \leq \frac{\overline{m}_{zb}^2}{2 \cot^2 z} = 0,12 * 10^{-2} \text{ m}^2, \quad \overline{m}_s \leq 0,035 \text{ m} = 35 \text{ mm},$$

$$\overline{m}_z^2 \leq \frac{\overline{m}_{zb}^2 \sin^4 z}{2s^2} = 0,763 * 10^{-8} \text{ rad}^2, \quad \overline{m}_z \leq 0,87 * 10^{-4} \text{ rad} = 56''.$$

zenitový úhel tedy stačí vytyčovat v jedné skupině minutovým teodolitem ($\overline{m}_z = 15''$). Pak bude

$$\overline{m}_{zb}^2 = \overline{m}_H^2 - \frac{\overline{m}_z^2 s^2}{\sin^4 z} - \overline{m}_i^2 - \overline{m}_v^2 = 1,33 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

na délkové měření zbude podíl

$$\overline{m}_s^2 \leq \frac{\overline{m}_{zb}^2}{\cot^2 z} = 0,23 * 10^{-2} \text{ m}^2, \quad \overline{m}_s \leq 0,048 \text{ m} = 48 \text{ mm}$$

Poznámka : V následujícím textu bude při rozborech přesnosti používáno místo \overline{m} zjednodušené označení m .

Při výběru metody vytyčení a příslušném rozboru přesnosti se současně určí způsob kontroly a vybere se metoda kontrolního měření včetně rozboru přesnosti. Vytyčovatel kontroluje výsledek vytyčení některým z následujících postupů :

- a) pomocí kontrolních geometrických prvků (nejčastěji obvodových nebo křížových měř),
- b) opakovaným vytyčením stejným postupem se stejnými přístroji a pomůckami,
- c) opakovaným vytyčením jiným postupem s přibližně stejnou přesností.

Při kontrole opakováním vytyčení b) a c) se výsledek kontroly zahrnuje do výsledku vytyčení podle pravidel pro dvojice měření.

Při výstupní nebo přejímací kontrole vytyčovací značek musí přesnost měření vyhovovat vztahu (ČSN 73 0212)

$$\delta x_{met} \leq 0,4 \delta x, \quad (6.18)$$

kde δx_{met} je mezní chyba kontrolního měření a δx je mezní vytyčovací odchylka.

Je-li nutné požadovanou přesnost m dosáhnout opakováním měření dané veličiny, zjistí se nezbytný počet opakování n ze vztahu

$$n \geq \frac{m_0^2}{m^2} \quad , \quad (6.19)$$

kde m_0 je střední chyba jednoho měření. Zaokrouhluje se ovšem vždy na vyšší celé číslo.

6.4 Rozbory přesnosti při měření (vytyčení)

Pomocí rozborů přesnosti při měření se ověřuje, zda jsou měřené (vytyčované) veličiny získávány s požadovanou přesností. Tyto rozbory se zpravidla omezují na testování extrémních odchylek od průměru. Hladina statistické významnosti (riziko) α se pro tyto testy volí s ohledem na použitý součinitel konfidence t následovně (pro jednorozměrné chyby) :

při $t = 2$ se volí $\alpha = 0,05 = 5\%$,

při $t = 2,5$ $\alpha = 0,01$ nebo $0,05$ (1% nebo 5%) .

Ve větších souborech měření (při vyšších počtech opakování n) se testuje též náhodnost , střední chyba , popřípadě poměr dvou středních chyb atd. Výsledky testování umožní včas rozpoznat nekvalitní měření, které se ze souboru vyloučí a vykonají se doplňující měření. Poskytují vyšší míru jistoty, že byl získán kvalitní měřický materiál.

6.5 Rozbory přesnosti po měření

Dosažená přesnost vytyčení se posuzuje porovnáním naměřené odchylky v kontrolním geometrickém prvku nebo rozdílu dvou vytyčení s mezní vytyčovací odchylkou nebo se střední chybou vytyčení podle vztahu

$$\Delta \leq \delta x \sqrt{2} = t \overline{m}_x \sqrt{2} \quad , \quad (6.20)$$

kde Δ je zjištěný rozdíl a t je zvolený součinitel konfidence.

Součinitel konfidence se zde volí obvykle stejný jako při rozboru přesnosti před měřením. Pokud se však odhaduje přítomnost systematických chyb, které se obtížně vylučují, volí se zde menší součinitel konfidence než při rozboru přesnosti před měřením (rozdíl dvojice vytyčení by těmito chybami měl být méně ovlivněn) . Ve většině případů se zde tedy volí $t = 2$. V tomto případě přejde vzorec (6.20) na tvar

$$\Delta \leq 2 \sqrt{2} \overline{m}_x = 2,8 \overline{m}_x \quad . \quad (6.21)$$

Při hodnocení výsledků výstupní či přejímací kontroly, kde přesnost měření splňuje požadavky (6.18) , platí pro posouzení zjištěných odchylek vztah

$$\Delta \leq \delta x \quad , \quad (6.22)$$

neboť v tomto případě je kontrolní měření vykonáno s řádově vyšší přesností.

Byla-li vytyčená hodnota získána z většího počtu měření ($n > 3$), porovnává se empirická střední chyba m se základní střední chybou \overline{m} podle vztahu

$$m_x \leq \overline{m}_x \left(1 + \sqrt{\frac{2}{k}} \right) \quad , \quad (6.23)$$

kde $k = n - 1$ je počet stupňů volnosti (počet nadbytečných měření).

Nesplnění příslušné nerovnosti znamená nesplnění požadavků na přesnost vytyčení a v takovém případě je třeba vykonat nové (další) měření a vytyčení podezřelých bodů. Pokud je příslušná nerovnost splněna, vytyčovací úloha se ukončí vytyčením průměru původního a kontrolního vytyčení.

Příklad :

Mostní osa o délce $s = 100$ m se má vytyčit s mezní odchylkou $\delta s = 10$ mm . K vytyčení bude použito paralaktické metody měření délek. Stanovte kritérium velikosti rozdílu dvou vytyčení osy mostu při volbě součinitele konfidence $t = 2,5$ (s ohledem na předpokládaný vliv systematických chyb) pro apriorní rozbor přesnosti.

Řešení :

Požadovaná střední chyba vytyčení podle (6.5) :

$$m_s = \delta s / t = 10 / 2,5 = 4 \text{ mm} \quad .$$

Pro stanovení meze pro rozdíl vytyčení se použije součinitele konfidence $t = 2$ (v rozdílu vytyčení se méně uplatní vliv systematických chyb) .

Kritérium pro rozdíl Δ je podle (6.11) :

$$\Delta \leq 2\sqrt{2} m_s = 2,8 * 4 = 11,2 \text{ mm} \quad .$$

Rozdíl dvojího vytyčení délky mostní osy nesmí překročit hodnotu 11,2 mm , v případě překročení je třeba vykonat další vytyčení.

Jiné řešení :

Projektovaná délka mostní osy se vytyčí jako průměr původního a kontrolního vytyčení. Pak pro střední chybu jednoho vytyčení bude platit

$$m_{so} = m_s \sqrt{2} = 4 * 1,4 = 5,6 \text{ mm} \quad .$$

Pro stanovení teoretické meze pro rozdíl obou vytyčení nyní bude platit

$$\Delta \leq 2\sqrt{2} m_{so} = 2,8 * 5,6 = 15,8 \text{ mm} \quad .$$

V případě velikosti rozdílu obou vytyčení menšího než 15,8 mm je možné považovat průměr obou hodnot za správně vytyčenou délku mostní osy.

Při posouzení přesnosti větších souborů vytyčených hodnot (např. v rozsahu celého objektu nebo jeho části) , kdy jde o stanovení souhrnné celkové přesnosti vytyčení, se používá vhodných metod matematické statistiky, zejména s ohledem na testování (vylučování) odlehlých měření, ověřování

rozdělení pravděpodobností odchylek, testování homogenity přesnosti měření a odhalování (vylučování) případných systematických vlivů.

V následujících kapitolách jsou uvedeny vzorce potřebné pro apriorní rozbory přesnosti běžných vytyčovacíh úloh.

Upozornění : V následujícím textu je přednostně používáno vyjádření úhlových veličin (zejména odchylek a středních chyb) v obloukové míře (jednotka 1 rad). V praxi se však úhly měří v jednotkách stupňové míry (1°) nebo setinné míry (1^s). Pro vzájemný převod se použije vztahů

$$\omega(\text{rad}) = \omega^\circ / \rho^0 = \omega^s / \rho^s \quad . \quad (6.24)$$

7 Měření a vytyčování základních veličin

7.1 Měření a vytyčování úhlů

Základním pojmem při měření úhlů je *směr*, což můžeme chápat jako hodnotu čtení kruhu úhloměrného přístroje příslušejícího určité záměře. Při měření úhlových veličin se používá přímý či nepřímý postup. U přímého postupu je přímo měřenou veličinou směr pravého ramene, zatímco směr levého ramene je dán nějakým definovaným směrem (např. astronomický poledník, rovnoběžka se směrem osy x rovinné souřadnicové soustavy aj.). Výsledkem takového měření je *orientovaný směr* (astronomický azimut, směrník apod.).

Při běžném nepřímém postupu se přímo měří směry obou ramen, a *úhel* je určován výpočtem jako jejich rozdíl podle jednoduchého modelu

$$\omega_{1,2} = r_2 - r_1 + \sum c_i \quad (7.1)$$

kde $\omega_{1,2}$ je určovaný úhel, r_1 resp. r_2 jsou měřené směry jeho levého resp. pravého ramene, $\sum c_i$ je souhrn uvažovaných korekcí systematických chyb.

7.1.1 Systematické vlivy při měření úhlů

Při měření a vytyčování úhlů působí celá řada systematických vlivů, které můžeme rozdělit do tří hlavních skupin:

- **vlivy přístrojové**, které vznikají nedokonalostí konstrukce a seřízení úhloměrného přístroje,
- **vlivy prostředí**, které mění dráhu záměrného optického paprsku, a
- **vlivy centrační**, které jsou způsobeny nepřesnostmi centrace přístroje a cílových značek.

7.1.1.1 Přístrojové systematické vlivy

Kolimační chyba: je způsobena nekolmostí záměrné osy a točné osy dalekohledu. Při měření v obou polohách dalekohledu se v jejich průměru vyloučí. Děje-li se měření či vytyčení pouze v jedné poloze dalekohledu, je třeba příslušný směr korigovat podle vztahu

$$\Delta r_c = \frac{c}{\sin z} = \frac{c}{\cos \varepsilon} \quad (7.2)$$

kde c je úhlová hodnota kolimační chyby, a z resp. ε je zenitový resp. výškový úhel záměry.

Chyba ze sklonu točné osy dalekohledu: je způsobena nekolmostí točné osy dalekohledu a svislé osy alhidády. Při měření v obou polohách dalekohledu se v jejich průměru vyloučí. Děje-li se měření či vytyčení pouze v jedné poloze dalekohledu, je třeba příslušný směr korigovat podle vztahu

$$\Delta r_i = i \operatorname{tg} \varepsilon = i \cot g z \quad (7.3)$$

kde i je úhlová hodnota chyby ze sklonu točné osy dalekohledu, a z resp. ε označují stejné veličiny jako v předcházejícím případě.

Chyba z nesvislosti osy alhidády: je způsobena nesvislou polohou osy, kolem které se otáčí alhidáda přístroje. Při měření v obou polohách dalekohledu se v jejich průměru **nevyloučí**. Měřený směr lze korigovat podle vztahu

$$\Delta r_v = v \sin \alpha \operatorname{tg} \varepsilon = v \sin \alpha \cot g z \quad (7.4)$$

kde v je úhlová hodnota odklonu osy alhidády od svislice, α je vodorovný úhel mezi rovinou ve které nastal odklon osy alhidády a rovinou záměry, a z resp. ε označují opět stejné veličiny jako v předcházejícím případě.

Chyba z nerovnoměrnosti dělení kruhu: je způsobena nedokonalostí činnosti dělicího stroje a bývá periodického charakteru. U velmi přesných měření se tato chyba koriguje na základě výsledků testovacích měření. Běžně se této chybě čelí volbou různých počátečních čtení v jednotlivých skupinách (zásady viz. modul M03).

Chyba z nerovnoměrnosti dělení bubínku mikrometru: je způsobena nedokonalým dělením bubínku mikrometru a/nebo nedokonalým seřízením čtecího mikroskopu. Bývá periodického a/nebo lineárního charakteru. Čelíme jí opět volbou rozdílného počátečního nastavení bubínku mikrometru v jednotlivých skupinách.

Chyby 2. řádu: řadíme sem chyby, jejichž velikost je řádově $1-2''$, a které vznikají fluktuacemi alhidády a přeastřováním dalekohledu. Uvažují se pouze při nejpřesnějších měřeních. **Fluktuace alhidády** vznikají nedokonalostí mechanického opracování čepu a ložiska alhidády a způsobují periodické kolísání osy alhidády. Změna polohy optických prvků při **přeastřování** způsobuje malé změny záměrné osy. Při přesných úhlových měřeních se proto pokud možno nedoporučuje měnit zaostření dalekohledu.

7.1.1.2 Vlivy vnějšího prostředí

Patří sem zejména atmosférické a fyzikální ovlivnění průběhu záměrného paprsku, a to boční refrakce, ohyb záměry na překážce.

Boční refrakce je vyvolána horizontálním teplotním gradientem, který vzniká v blízkosti stěn nebo jiných vertikálních konstrukcí majících teplotu rozdílnou od okolního prostředí. Ovlivnění měřeného směru závisí na velikosti teplotního gradientu, na délce úseku ovlivnění i na vzdálenosti od přístroje.

Ohyb záměry nastává, probíhá-li záměra v těsné blízkosti nějaké hrany. Systematické ovlivnění měřeného směru je tím větší, čím blíže přístroji je tato překážka. Proto je vždy vhodné dodržet minimální odstup záměrného paprsku od stěn a překážek alespoň 0,15 – 0,25 m.

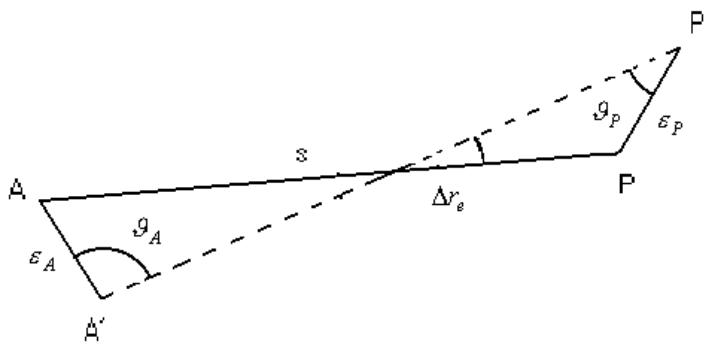
7.1.1.3 Centrační chyby

Tyto systematické chyby vznikají nepřesnou centrací úhломěrného přístroje a cílových značek. Jejich velikost je závislá na způsobu centrace, na seřízení centračních pomůcek a zařízení, a též na zkušenosti měřiče.

Používané způsoby centrace a jejich přesnost:

způsob centrace	střední polohová chyba $m_{p(e)}$
olovnice	2 – 5 mm
centrační tyč	1 – 2 mm
optický dostředovač	0,3 – 0,7 mm
nucená centrace	0,1 – 0,2 mm

Vliv centračních chyb na měřený směr lze odvodit podle obr. 6



Obr. 6 - Vliv excentricit přístroje a cíle na měřený směr

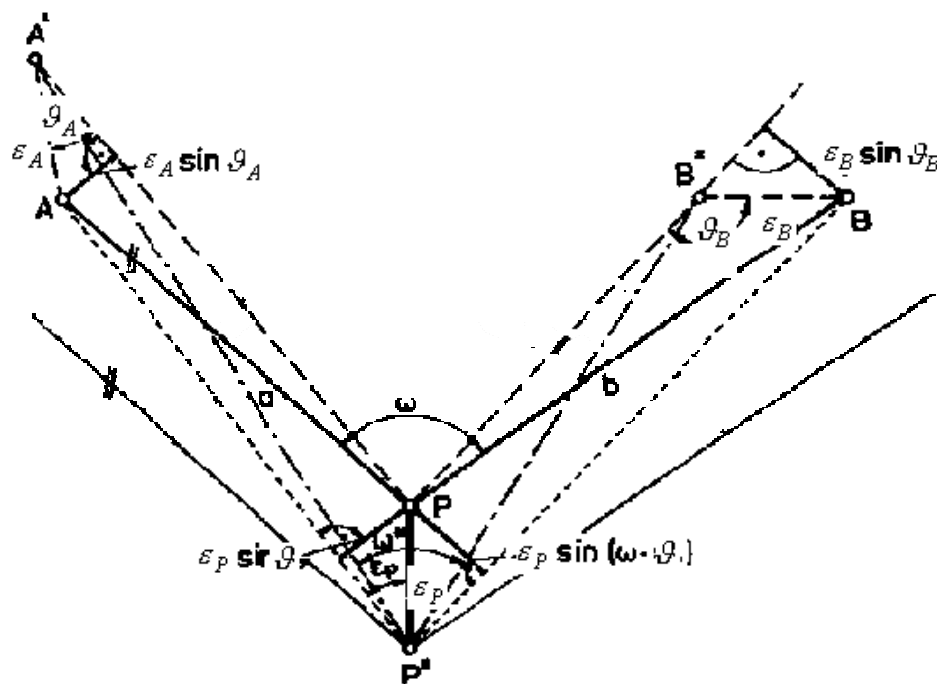
$$\Delta r_e = \frac{\varepsilon_A}{s} \sin \vartheta_A + \frac{\varepsilon_P}{s} \sin \vartheta_P \quad (7.5)$$

kde Δr_e je změna hodnoty měřeného směru vlivem chyb v centraci přístroje ε_A a cílové značky ε_P , s je délka záměry a ϑ_A , ϑ_P jsou příslušné úhly excentricit. Tato změna má náhodný charakter a může být považována za skutečnou chybu ε_{r_e} . Střední chyba směru je pak vyjádřena vztahem

$$m_{r_e}^2 = \frac{m_{e_A}^2}{s^2} \sin^2 \vartheta_A + \frac{m_{e_P}^2}{s^2} \sin^2 \vartheta_P \leq \frac{m_{e_A}^2}{s^2} + \frac{m_{e_P}^2}{s^2} \quad (7.6)$$

Je-li použit stejný způsob centrace přístroje i cílové značky charakterizovaný střední chybou m_e , bude platit zjednodušený vztah

$$m_{r_e} = \frac{m_e \sqrt{2}}{s} \quad (7.7)$$



Obr. 7 - Vliv chyb centrace na měřený úhel

Vliv centračních chyb na měřený úhel pak lze vyjádřit vztahem (podle Obr. 7)

$$\Delta\omega_e = \varepsilon_P \left[\frac{\sin \varrho}{a} + \frac{\sin(\omega - \varrho)}{b} \right] + \frac{\varepsilon_A}{a} \sin \varrho_A + \frac{\varepsilon_B}{b} \sin \varrho_B \quad (7.8)$$

kde $\Delta\omega_e$ je změna hodnoty měřeného úhlu vlivem chyb v centraci přístroje ε_P a cílových značek ε_A , ε_B , dále a , b jsou délky záměr levého a pravého ramene, a ϱ , ϱ_A , ϱ_B jsou příslušné úhly excentricit. Tato změna má opět

náhodný charakter a může být považována za skutečnou chybu ε_{ω_e} . Vztah lze upravit při zavedení $s = (a + b)/2$, a s uvážením maximálního ovlivnění při

$\varrho = \omega/2$ na tvar

$$\varepsilon_{\omega_e} = \frac{1}{s} \left(2\varepsilon_P \sin \frac{\omega}{2} + \varepsilon_A \sin \varrho_A + \varepsilon_B \sin \varrho_B \right) \quad (7.9)$$

Střední chyba úhlu je pak vyjádřena vztahem (zjednodušení za předpokladu stejného způsobu centrace přístroje a cílových značek s přesností m_e)

$$m_{\omega_e}^2 = \frac{m_e^2}{s^2} \left(4 \sin^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \varrho_A + \sin^2 \varrho_B \right) \leq \frac{m_e^2}{s^2} \left(4 \sin^2 \frac{\omega}{2} + 2 \right) \quad (7.10)$$

Pro hodnotu $\omega = 2R$ (přímý úhel) nabývá tento výraz největší hodnoty

$$m_{\omega_e}^2 = \frac{6m_e^2}{s^2} \quad (7.11)$$

7.1.2 Náhodné vlivy při měření úhlů

Mezi základní náhodné vlivy při měření a vytyčování úhlů řadíme cílení a čtení úhlové stupnice. Je třeba říci, že příslušné chyby jsou subjektivní – jsou způsobeny nedokonalostí smyslu měřiče. Podstatnou roli zde hraje též zkušenost.

Chyba z cílení: vzniká nepřesným navedením záměrné značky na obraz cíle v dalekohledu. Její skutečná velikost je závislá m.j. na tvaru záměrného obrazce, na tvaru a velikosti cílové značky, ale též na úrovni osvětlení cíle, na povětrnostních podmínkách. Její základní velikost se zpravidla uvažuje konstantní hodnotou podle empirického vztahu

$$m_z = \frac{185^{cc}}{z} \approx \frac{60''}{z} \quad (7.12)$$

kde m_z je střední chyba z cílení a z je zvětšení dalekohledu.

Příklad: Pro optické teodolity Zeiss typů THEO 010A,B , THEO 015A,B a THEO 020A,B , které mají zvětšení dalekohledu 30x , je uvažována hodnota střední chyby z cílení $m_z = 185^{cc}/30 \approx 6^{cc} \approx 2''$.

Chyba ze čtení úhlové stupnice je dána způsobem čtení kruhů (typem čtecí pomůcky – mřížka, jednoduchý mikroskop, koincidenční mikrometr, kódové čtení). Lze ji snadno stanovit empiricky z řady opakovaných čtení stejného směru. Orientačně se počítá s hodnotami

$m_o \approx 0,15d$ pro mřížku, kde d je hodnota nejmenšího dílku mřížky,

$m_o \approx 2d$ pro mikrometr, kde d je hodnota nejmenšího dílku bubínku mikrometru

Příklad: Pro optický teodolit Zeiss THEO 020A,B s mřížkou (nejmenší dílek 1^c) je uvažována hodnota střední chyby ze čtení úhlové stupnice

$m_o \approx 0,15 \cdot 100^{cc} = 15^{cc}$, a pro teodolit Zeiss THEO 010A,B s koincidenčním mikrometrem (nejmenší dílek 2^{cc}) je tato chyba

$m_o \approx 2 \cdot 2^{cc} = 4^{cc}$.

7.1.3 Metodika rozboru přesnosti vytyčování úhlů

Úplná střední chyba vodorovného směru měřeného v jedné poloze dalekohledu je dána výrazem

$$m_{r'}^2 = m_e^2 + m_e^2 + m_i^2 + m_z^2 + m_o^2 \quad (7.13)$$

kde první tři členy napravo zahrnují vliv zbytkových systematických chyb (centrace přístroje a cílové značky, souhrn dalších systematických vlivů) a další dva představují náhodnou složku.

Pro střední chybu směru měřeného v jedné skupině (2 polohy dalekohledu) bude platit vztah

$$m_{r_0} = \frac{m_{r'}'}{\sqrt{2}} \quad (7.14)$$

Tato střední chyba bývá udávána v technických datech úhломěrných přístrojů jako charakteristika přesnosti.

Střední chyba vodorovného úhlu měřeného v jedné poloze dalekohledu pak bude dána výrazem

$$m_{\omega'} = m_{r'}' \sqrt{2} \quad (7.15)$$

a střední chyba úhlu měřeného v jedné skupině (v obou polohách dalekohledu) je dána vztahem

$$m_{\omega_0} = \frac{m_{\omega'}'}{\sqrt{2}} = m_{r_0} \sqrt{2} \quad (7.16)$$

Tato střední chyba m_{ω_0} je základní charakteristikou přesnosti pro rozboru přesnosti úhlových měření a vytyčování.

Úhly malé velikosti bývají měřeny v tzv. paralaktických jednotkách δ (se schématem měření LLPPPPLL). Taková jednotka je vlastně dvojskupina a její střední chyba je

$$m_{\delta_0} = \frac{m_{\omega_0}}{\sqrt{2}} \quad (7.17)$$

Přesnost svislého úhlu se uvažuje poněkud odlišně, což vyplývá ze skutečnosti, že přímo měřen je pouze směr záměry zatímco druhé rameno úhlu je svislé nebo vodorovné (zajištěno funkcí čtecího zařízení). Střední chyba zenitového úhlu měřeného v jedné skupině je dána výrazem

$$m_{z_0}^2 = \frac{1}{2} (m_z^2 + m_o^2 + m_u^2) \quad (7.18)$$

kde m_u je střední chyba urovnání čtecího indexu výškového kruhu. Její hodnota v případě indexové libely se uvažuje čtvrtinou její citlivosti ($f/4$), pro automatický index se bere podle údajů výrobce přístroje (zpravidla $\approx 1^{\text{cc}}$).

Postup rozboru přesnosti vytyčení vodorovného úhlu:

- Stanovení požadované úplné střední chyby vytyčení
- Odhad souhrnného vlivu zbytkových systematických chyb
- Výpočet náhodné složky požadované střední chyby s využitím vztahu (7.13)
- Výběr přístroje a stanovení potřebného počtu n opakování měření (skupin, paralaktických jednotek) podle vzorce

$$n = \frac{m_{\omega_0}^2}{m_{\omega}^2} \quad (7.19)$$

výsledek je ovšem třeba zaokrouhlit na celé číslo nahoru.

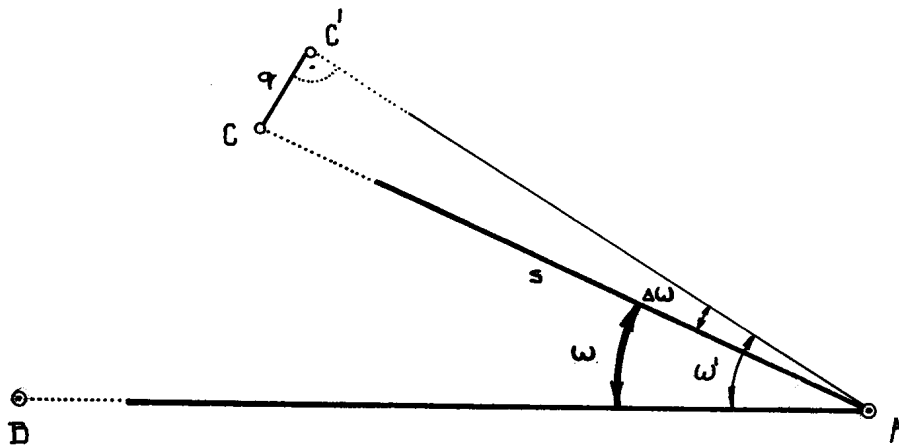
7.1.4 Vytyčení úhlu s požadovanou přesností

Požadavek přesnosti při vytyčení úhlu může být specifikován

- střední chybou m_ω
- mezní odchylkou δ_ω
- mezní příčnou odchylkou δ_q na danou vzdálenost s .

Metodický postup vytyčení vodorovného úhlu při zadaném požadavku přesnosti je rozdělen do několika na sebe navazujících fází (obr. 8):

1. rozbor přesnosti před měřením, jehož výsledkem je výpočet (náhodné) střední chyby m_ω , výběr přístroje a stanovení počtu opakování měření n , ale také stanovení mezní odchylky dvojitýho vytyčení $\Delta\omega_{max}$,
2. předběžné vytyčení (v 1 poloze dalekohledu) a vyznačení bodu C' ,
3. odměření úhlu ω' ve stanoveném počtu skupin,
4. výpočet příčného posunu $q = (\omega - \omega') s$,
5. vytyčení posunu q (pozor na správný směr!) a vyznačení bodu C'' ,
6. kontrolní odměření úhlu ω'' opět ve stanoveném počtu skupin,
7. výpočet $dq = (\omega - \omega'') s$,
8. posouzení splnění podmínky $dq \leq s \cdot \Delta\omega_{max}$ a ukončení vytyčení.



Obr. 8 - Vytyčení úhlu s požadovanou přesností

7.2 Měření a vytyčování délek

7.2.1 Metodika vytyčování délek

Metody vytyčování délek dělíme na přímé a nepřímé. U přímých metod je měřená délka přímo porovnávána s nějakým délkovým měřítkem (pásno, délka elektromagnetické vlny) zatímco u nepřímých metod je výsledná délka získávána výpočtem z jiných přímo měřených veličin (úhly, pomocné délky aj.). V inženýrské geodézii se z přímých metod používají mechanické a

elektronické délkové měření, z nepřímých metod zejména paralaktické délkové měření.

Měřené délky je třeba opravit korekcemi na délky v rovině příslušného kartografického zobrazení, mají-li být použity v souřadnicových výpočtech. Naopak délky odvozené ze souřadnic musí být korigovány opačně, mají-li být použity při vytyčování.

- **korekce šikmé délky na vodorovnou**

$$\Delta s = s'(\sin z - 1) = s'(\cos \varepsilon - 1) = -\frac{h^2}{2s'} - \frac{h^4}{8s'^3} - (6) \quad (7.20)$$

kde s' je šikmá délka a h je převýšení koncových bodů

- **korekce na nulový horizont**

$$\Delta s = -\frac{H}{R} s \quad (7.21)$$

kde H je nadmořská výška a R je poloměr Země

- **korekce z kartografického zkreslení**

Pro souřadnicový systém S-JTSK (Křovákovo zobrazení) platí vztah

$$\Delta s = -s \cdot m_0 \quad (7.22)$$

kde m_0 je hodnota délkového zkreslení, která může dosáhnout extrémní hodnoty až 13 cm/km.

Pro souřadnicový systém S-42 (Gaussovo zobrazení) platí vztah

$$\Delta s = \frac{y^2}{2R^2} s \quad (7.23)$$

kde y je vzdálenost od základního poledníku (souřadnice) a R je opět poloměr Země, hodnota délkového zkreslení může dosáhnout extrémní hodnoty 14 cm/km na okraji třístuňových pásů.

7.2.2 Mechanické vytyčení délky

Mechanická (klasická) délková měření používají pásma vyrobená z různých materiálů (ocel, invar, umělé hmoty), popřípadě speciální měřidla (strojnictví). Tento způsob měření je efektivní při měření a vytyčování krátkých vzdáleností (do 100 m), nejefektivnější je práce v rozsahu jednoho kladu pásma.

Ocelovým pásmem lze běžně dosahovat poměrné přesnosti asi 1:2000, při použití přesné technologie (komparované pásmo, korekce systematických vlivů) lze tuto přesnost zvýšit asi na 1:10 000.

Matematický model:

$$s_i = o_K - o_P + \sum c_j \quad (1 \text{ klad}) \quad , \quad (7.24)$$

$$s = \sum s_i \quad (\text{celá délka}) \quad , \quad (7.25)$$

kde o_P je čtení stupnice pásma na počátečním bodě a o_K je čtení na koncovém bodě měřeného úseku s_i , c_j jsou uvažované systematické vlivy a s je celková měřená vzdálenost

Korekce systematických vlivů:

1) oprava z nesprávné délky měřidla (z komparace)

$$c_1 = \frac{\Delta l}{L} s_i \quad , \quad (7.26)$$

kde $\Delta l = l - L$ (l je skutečná a L je nominální délka měřidla). Rozdíl Δl se zjišťuje komparací měřidla. Laboratorní komparace (laserová interferometrie) dosahuje přesností řádově 10^{-6} m, komparace na vybudované srovnávací základně je poněkud méně přesná ($\sim 2 \cdot 10^{-5}$ m). Pásma se komparují zpravidla ve vodorovné poloze podložené po celé délce. Výsledkem komparace je protokol, ve kterém jsou kromě komparačních oprav uvedeny také teplota měřidla, použitá napínací síla a další náležitosti (Obr. 10).

U nás se komparací pásem zabývá např. metrologická laboratoř VÚGTK ve Zdibech.

2) oprava z teplotního rozdílu

$$c_2 = \alpha (t - t_k) s_i \quad (7.27)$$

kde α je koeficient tepelné roztažnosti materiálu pásma, t je teplota stuhu pásma při měření (měří se kontaktním teploměrem) a t_k je teplota, při níž bylo pásmo komparováno. Koeficient α je pro ocel v rozmezí $1 - 1,2 \cdot 10^{-5} [^{\circ}\text{C}^{-1}]$, pro invar je v rozmezí $0 - 2,5 \cdot 10^{-6} [^{\circ}\text{C}^{-1}]$.

Příklad : Délka $s = 100$ m je měřena při teplotě stuhu pásma $t = 30^{\circ}\text{C}$, zatímco teplota při komparaci tohoto ocelového pásma byla $t_k = 30^{\circ}\text{C}$. Vypočítejte velikost opravy z teplotního rozdílu.

Řešení :

$$c_2 = \alpha (t - t_k) s_i = 10^{-5} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1} \cdot (40 - 30)^{\circ}\text{C} \cdot 100 \text{ m} = 0,010 \text{ m} = 10 \text{ mm} .$$

3) oprava z rozdílu napětí

$$c_3 = \frac{s_i (F - F_k)}{E q} \quad (7.29)$$

kde F je napínací síla při měření, F_k je napínací síla použitá při komparaci pásma, E je modul pružnosti materiálu a q je plocha příčného řezu stuhu pásma. Napínací sílu při měření je třeba kontrolovat pomocí siloměru. Hodnota modulu pružnosti pro ocel i invar se pohybuje v mezích $E = 150\,000 - 200\,000 \text{ N mm}^{-2}$.

Příklad : Vypočítejte hodnotu korekce ocelovým pásmem měřeného úseku délky $s_i = 20$ m z rozdílu napětí, Napínací síla při měření byla $F = 80 \text{ N}$, zatímco napínací síla použitá při komparaci tohoto pásma byla $F_k = 50$. Plocha příčného řezu stuhu pásma je $q = 4 \text{ mm}^2$.

Řešení :

$$c_3 = \frac{s_i (F - F_k)}{E q} = \frac{20 \text{ m} (80 - 30) \text{ N}}{1,5 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-2} \cdot 4 \text{ mm}} = 0,0008 \text{ m} = 0,8 \text{ mm}$$

4) oprava z průvěsu

$$c_4 = \frac{s_i^3 G^2}{24 F^2} \quad (7.30)$$

kde F je napínací síla při měření a G je tíha 1 m stuhu pásma. Tato oprava se zavádí tehdy, je-li pásmo při měření v jiné poloze než při komparaci (např. pásmo, které bylo komparováno vodorovně podložené po celé délce, je při měření v zavěšené poloze).

Příklad : Délkový úsek $s_i = 20 \text{ m}$ je měřen pásmem v zavěšené poloze, zatímco při komparaci bylo pásmo vodorovně podložené po celé délce. Tíha 1 m pásma je $G = 0,02 \text{ kg m}^{-1}$, pásmo bylo napínáno silou 100 N . Vypočítejte hodnotu korekce z průvěsu pásma.

Řešení :

$$c_4 = \frac{s_i^3 G^2}{24 F^2} = \frac{20^3 \text{ m}^3 \cdot 0,02^2 \text{ kg}^2 \text{ m}^{-2}}{24 \cdot 100^2 \text{ N}^2} = 0,0014 \text{ m} = 1,4 \text{ mm}$$

5) oprava ze sklonu

$$c_5 = - \left(\frac{h^2}{2s'} - \frac{h^4}{8s'^3} \right) \quad (7.31)$$

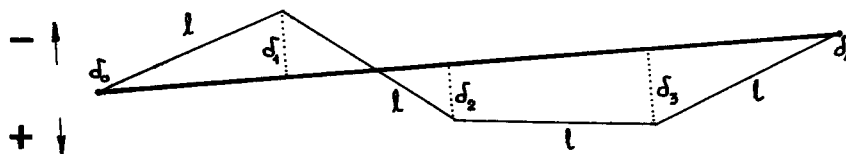
kde h je výškový rozdíl obou koncových bodů měřeného úseku a s' je šikmá délka. Je účelné výškové rozdíly koncových bodů úseků měřit nivelací. Výrazu (7.31) se též často používá k výpočtu potřebné přesnosti určení převýšení koncových bodů, je-li dána požadovaná přesnost výpočtu korekce c_5 . Podle zákona hromadění skutečných chyb bude po úpravě platit vztah

$$\varepsilon_{c_5} = \frac{h}{s'} \varepsilon_h$$

6) oprava z vybočení

$$c_6 = - (\delta_K - \delta_P)^2 \frac{1}{2s_i} \quad (7.32)$$

kde δ_P , δ_K jsou hodnoty vybočení počátečního a koncového bodu měřeného úseku s_i z přímé spojnice koncových bodů (Obr. 9).



Obr. 9 - Vybočení pásma z přímé spojnice


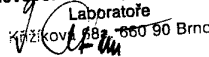
Opravu pro celou délku s lze zavést podle přibližného vztahu

$$c_6 \approx -(2n - 3) \frac{\delta^2}{s} \quad (7.33)$$

kde n je počet úseků a δ je průměrné (střední) vybočení závislé na způsobu zařazování koncových bodů úseků do přímé spojnice. Tuto korekci lze prakticky anulovat, zařazují-li se body úseků do přímého směru přesně pomocí teodolitu.



Královopolská strojírna Brno, a.s.
METROLOGICKÁ LABORATOŘ
KRŽÍKOVA 68a, 660 90 BRNO

KALIBRAČNÍ LIST CALIBRATION SHEET		Číslo: 1687/01 No. STRANA: 1 / 1 Page	
ZÁKAZNÍK: Jméno, adresa CUSTOMER Name, address		DATUM PŘIJETÍ: RECEIVING DATE 29.8.2001	
NÁZEV MĚŘIDLA, TYP: MEASURING INSTRUMENT TYPE měřické pásmo "BMI ERGOLINE" - 30m		EVIDENČNÍ ČÍSLO: IDENTIFICATION No. KL - 1118	
TECHNICKÉ ÚDAJE - NAMĚŘENÉ HODNOTY: TECHNICAL DATA - MEASURED VALUES			
měřeny úsek [m]	naměřená úchytky [mm]	měřeny úsek [m]	naměřená úchytky [mm]
1,0	+ 0,1	14,0	+ 0,2
2,0	- 0,2	15,0	+ 0,3
3,0	+ 0,4	16,0	+ 0,2
4,0	+ 0,4	17,0	+ 0,2
5,0	0,0	18,0	0,0
6,0	- 0,1	19,0	- 0,1
7,0	- 0,1	20,0	+ 0,2
8,0	0,0	22,0	+ 0,4
9,0	+ 0,1	24,1	+ 0,5
10,0	+ 0,1	26,0	+ 0,7
11,0	0,0	28,0	+ 0,6
12,0	+ 0,2	30,0	+ 1,0
13,0	+ 0,3		
napínací síla: 50N			
Vysvětlivka: "+"/"- znamená, že pásmo je "delší" / "kratší".			
METODA KALIBRACE, PŘEDPIS: CALIBRATION PROCEDURE USED QSI 4.11-04.04 "Kalibrace měřických pásem"		PODMÍNKY PŘI KALIBRACI: CALIBRATION CONDITIONS klimatizovaná laboratoř 20 ± 1°C	
POUŽITÝ ETALON: STANDARD USED Zeiss 6000 - ev.č. 50552, Kalibrační list č. 633-KL-L103/00, rozšířená nejistota měření U = (2,0 + 7L) [µm], L = měřená délka v [m], koeficient rozšíření k = 2			
VÝSLEDEK KALIBRACE: CALIBRATION RESULT vyhovuje třídě přesnosti "1" (přesná pásma) dle QSI 4.11-04.04			
DATUM KALIBRACE: CALIBRATION DATE 30.8.2001		PLATNOST KALIBRACE: CALIBRATION VALIDITY	
DATUM VYSTAVENÍ: ISSUE DATE 30.8.2001	KALIBRACI PROVEDL: JMÉNO, PODPIS CALIBRATION CARRIED OUT BY Name, Signature  Jaroslav Klíma	SCHVÁLIL: Razítko, podpis ved. laboratoře APPROVED: Stamp, laboratory manager signature Královopolská strojírna Brno, a. s. Laboratoře Kržíkova 68a, 660 90 Brno 	

KALIBRAČNÍ LIST MŮŽE BÝT REPRODUKOVÁN JEDINĚ CELÝ S PÍSMŮNÝM SOUHLASEM KALIBRAČNÍ LABORATOŘE
THE CALIBRATION SHEET MUST BE REPRODUCED EXCEPT IN FULL WITHOUT THE WRITTEN APPROVAL OF CALIBRATION LABORATORY

Q - Form No. 53 - Rev. 0

Obr. 10 Kalibrační list ocelového pásma

Náhodné chyby při měření pásmy zahrnují chyby v provázení koncových bodů úseku do stupnice pásma, chyby v přiřazení kladů (úseků) a chyby ve čtení stupnice pásma.

Úplná střední chyba mechanicky měřené délky se vyjadřuje vzorcem

$$m_s^2 = \lambda_s^2 s^2 + \lambda_n^2 s \quad (7.34)$$

kde λ_s , λ_n jsou empirické koeficienty vyjadřující souhrnné působení zbytkových systematických a náhodných chyb. Používané hodnoty pro běžná měření jsou $\lambda_s = 1,5 \cdot 10^{-4}$, $\lambda_n = 1,5 \cdot 10^{-3}$ na 1 m délky.

Při přesném mechanickém měření délky, kdy se stabilizují krátké úseky jejichž koncové body se zařadí do přímé spojnice teodolitem, převýšení se změní nivelací a zavádí se všechny potřebné opravy, nabývají výše uvedené koeficienty přibližně třetinových hodnot.

7.2.3 Elektronické vytyčení délky

V IG se používají světelné dálkoměry s dosahem 3-5 km (aktuální dosah je závislý na aktuálním stavu prostředí a na mohutnosti odrazného systému). Přesnost měření nebo vytyčení délky je udávána vzorcem

$$m_s = a_{mm} + b_{ppm} \quad (7.35)$$

kde a je konstantní člen udávaný v jednotkách mm a b je člen úměrný měřené délce vyjadřovaný v milióntinách délky (ppm, tj. 10^{-6} s). Hodnoty těchto členů bývají specifikovány v technických údajích příslušného přístroje.

Vzorec (7.35) udává přesnost šikmé délky opravené o fyzikální redukci z vlivu prostředí (aktuální index lomu) a geometrickou redukci (suma součtových konstant dálkoměru a odrazného systému). Hodnota geometrické redukce se může měnit a je ji třeba čas od času ověřovat na kalibrační základně. Při měření s novým neznámým dálkoměrem se musí její hodnota vždy určit. Pro stanovení fyzikální redukce se měří u dálkoměru (lépe i u odrazného systému) teplota, tlak a vlhkost atmosféry, z nichž se určí hodnota příslušné redukce a vloží do přístroje. Některé moderní dálkoměry již mají fyzikální redukci zaváděnou automaticky.

Při rozbořích přesnosti vytyčování délek v rozsahu do 1 km lze často počítat pouze se členem a ve vzorci (7.35), neboť vliv členu b nepřesáhne u současných běžných dálkoměrů 2-3 mm.

Příklad : Délka $s = 1000$ m je měřena elektronickým dálkoměrem, jehož přesnostní parametry jsou $m_s = 3$ mm + 2 ppm. Vypočítejte očekávanou hodnotu střední chyby měřené délky.

Řešení :

$$m_s = 0,003 + 2 \cdot 1000 \cdot 10^{-6} = 0,005 \text{ m} = 5 \text{ mm} \quad .$$

7.2.4 Vytyčení délky paralaktickou metodou

Paralaktický způsob měření a vytyčování délek se v praxi používá při určování kratších vzdáleností s vysokou přesností, tedy v případech kdy přesnost elektronických dálkoměrů nepostačuje a mechanické měření je nevýhodné. Podstatou paralaktické metody je nepřímé odvození délky z úhlového měření na koncové body základny (latě) o známé konstantní délce.

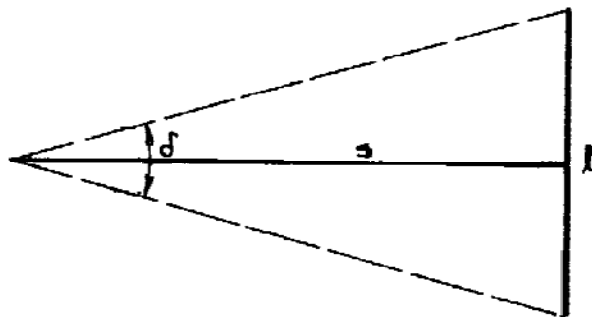
Pro dodržení požadovaných přesností je třeba k měření používat komparované a ověřené základnové latě. Při přesných aplikacích se do výpočtu zavádějí korekce systematických vlivů způsobených základnovou latí, a to

- nesprávná délka latě, změna délky latě vlivem rozdílu teplot,
- podélná a příčná excentricita základnové latě,
- nekolmost základnové latě k měřené délce,
- nevodorovnost základnové latě.

Po ošetření těchto systematických vlivů je přesnost výsledné délky závislá především na přesnosti měření paralaktického úhlu δ mezi terči základnové latě.

Postup měření úhlů v paralaktických jednotkách je popsán v (M03). Nejčastěji používaná schémata (tzv. paralaktické články) jsou

- a) základnová lat' na konci měřené délky (Obr. 11)



Obr. 11 - Jednoduchý paralaktický článek s latí na konci

Výpočetní vztah:
$$s = \frac{l}{2} \cot g \frac{\delta}{2} \quad , \quad (7.36)$$

kde s je určovaná délka,

l je skutečná délka základnové latě,

δ je měřený paralaktický úhel,

Rozbor přesnosti :

Diferencováním funkčního vztahu (7.36) podle jednotlivých proměnných δ , l při aplikaci zákona hromadění skutečných chyb se získá výraz pro skutečnou chybu měřené délky.

Nejprve se vyšetří závislost na chybě paralaktického úhlu δ . Vztah pro skutečnou chybu délky je v tomto případě

$$\varepsilon_s = \frac{\partial s}{\partial \delta} \varepsilon_\delta = -\frac{l}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{2} \varepsilon_\delta$$

Při akceptování podmínky $\frac{\delta}{2} \rightarrow 0$ bude platit též $\sin^2 \frac{\delta}{2} \approx \text{tg}^2 \frac{\delta}{2} = \frac{l^2}{4s^2}$ a vztah pro skutečnou chybu ε_s získá tvar

$$\varepsilon_s = -\frac{l}{4} \frac{4s^2}{l^2} \varepsilon_\delta = -\frac{s^2}{l} \varepsilon_\delta \quad (7.37)$$

Střední chyba určené délky v závislosti na přesnosti paralaktického úhlu m_δ je pak vyjádřena vztahem

$$m_s = \frac{s^2}{l} m_\delta \quad , \quad (7.38)$$

Pro standardní délku základnové latě $l = 2$ m bude mít tento výraz tvar

$$m_s = \frac{s^2}{2} m_\delta$$

Obdobným postupem je možné vyšetřit závislost na chybě v délce základnové latě l . Vztah pro skutečnou chybu délky je v tomto případě

$$\varepsilon_s = \frac{\partial s}{\partial l} \varepsilon_l = \frac{1}{2} \cot g \frac{\delta}{2} \varepsilon_l = \frac{1}{2} \frac{2s}{l} \varepsilon_l = \frac{s}{l} \varepsilon_l \quad (7.39)$$

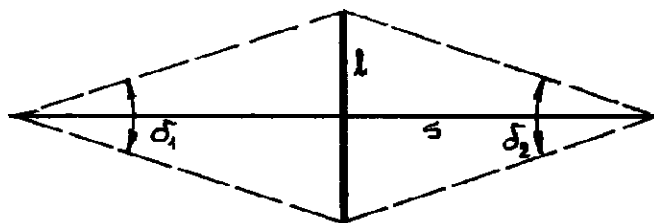
a střední chyba měřené délky v závislosti na přesnosti určení délky základnové latě m_l je vyjádřena vztahem

$$m_s = \frac{s}{l} m_l \quad (7.40)$$

Pro standardní délku základnové latě $l = 2$ m bude mít tento výraz tvar

$$m_s = \frac{s}{2} m_l$$

b) základnová lat' uprostřed měřené délky (Obr. 12)



Obr. 12 - Paralaktický článek s latí uprostřed

Výpočetní vztah:
$$s = \frac{l}{2} \left(\cot g \frac{\delta_1}{2} + \cot g \frac{\delta_2}{2} \right) \quad , \quad (7.41)$$

kde s je určovaná délka,

l je skutečná délka základnové latě,

δ_1, δ_2 jsou měřené paralaktické úhly,

Rozbor přesnosti :

Měřená délka je rozdělena na dva úseky s_1, s_2 , z nichž každý je měřen jako článek s latí na konci (viz. předcházející případ). Podle zákona hromadění středních chyb je možné napsat

$$m_s^2 = m_{s_1}^2 + m_{s_2}^2 = \frac{s_1^4}{l^2} m_{\delta_1}^2 + \frac{s_2^4}{l^2} m_{\delta_2}^2$$

Při umístění základnové latě přibližně uprostřed ($s_1 \approx s_2 \approx \frac{s}{2}$) a za předpokladu stejné úrovně přesnosti měření paralaktických úhlů ($m_{\delta_1} \approx m_{\delta_2} = m_\delta$) bude mít tento vztah tvar

$$m_s^2 = \left(\frac{s^4}{16l^2} + \frac{s^4}{16l^2} \right) m_\delta^2 = \frac{s^4}{8l^2} m_\delta^2$$

a odtud po odmocnění bude střední chyba určené délky

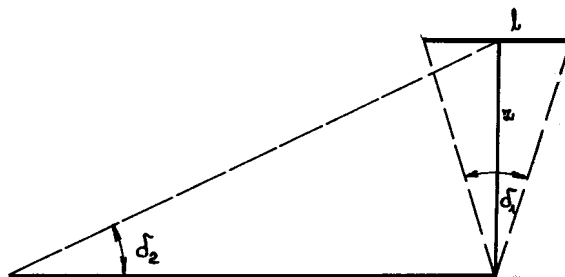
$$m_s = \frac{s^2}{l\sqrt{8}} m_\delta \quad (7.42)$$

Pro standardní délku základnové latě $l = 2$ m bude mít tento výraz tvar

$$m_s = \frac{s^2}{2\sqrt{8}} m_\delta \approx 0,177 s^2 m_\delta$$

c) **pomocná základna na konci měřené délky v kolmé poloze** (Obr. 13)

Délka se určuje z pravouhlého trojúhelníka, kde jednou odvěsnou je měřená délka a druhou odvěsnou je pomocná základna měřená jako jednoduchý článek s latí na konci.



Obr. 13 - Pomocná základna na konci v kolmé poloze

$$\text{Výpočetní vztah: } s = z \cot g \delta_2 = \frac{l}{2} \cot g \frac{\delta_1}{2} \cot g \delta_2, \quad (7.43)$$

kde s je určovaná délka,

l je skutečná délka základnové latě,

δ_1, δ_2 jsou měřené paralaktické úhly,

Rozbor přesnosti :

Diferencováním vztahu (7.43) podle z a δ_2 se získá vztah pro skutečnou chybu určované délky

$$\varepsilon_s = \frac{\partial s}{\partial z} \varepsilon_z + \frac{\partial s}{\partial \delta_2} \varepsilon_{\delta_2} = \cot g \delta_2 \varepsilon_z - \frac{z}{\sin^2 \delta_2} \varepsilon_{\delta_2}$$

Paralaktický úhel δ_2 je vždy malý ($\delta_2 \rightarrow 0$), pak též platí

$$\sin^2 \delta_2 \approx \text{tg}^2 \delta_2 = \frac{z^2}{s^2}$$

a vzorec pro skutečnou chybu určované délky lze přepsat na tvar

$$\varepsilon_s = \frac{s}{z} \varepsilon_z - \frac{s^2}{z} \varepsilon_{\delta_2}$$

Zde je ještě třeba nahradit skutečnou chybu délky pomocné základny podle

$$\varepsilon_z = -\frac{z^2}{l} \varepsilon_{\delta_1}$$

čímž se získá výsledný tvar vztahu pro skutečnou chybu délky s

$$\varepsilon_s = -\frac{s z}{l} \varepsilon_{\delta_1} - \frac{s^2}{z} \varepsilon_{\delta_2} \quad (7.44)$$

a podle zákona hromadění středních chyb bude střední chyba určované délky dána výrazem

$$m_s^2 = \frac{s^2 z^2}{l^2} m_{\delta_1}^2 + \frac{s^4}{z^2} m_{\delta_2}^2 \quad (7.45)$$

Tento výraz je za předpokladu stejné úrovně přesnosti měření paralaktických úhlů ($m_{\delta_1} \approx m_{\delta_2} = m_\delta$) možné přepsat na výsledný tvar

$$m_s^2 = s^2 \left(\frac{z^2}{l^2} + \frac{s^2}{z^2} \right) m_\delta^2 \quad (7.46)$$

Optimální délka pomocné základny se dá určit jako extrém výrazu v závorce tohoto vztahu, který lze vypočítat z podmínky

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^2}{l^2} + \frac{s^2}{z^2} \right) = \frac{2z}{l^2} - \frac{2s^2}{z^3} = 0$$

odkud po úpravě

$$2z^4 - 2s^2 l^2 = 0$$

a odtud konečně

$$z_{opt} = \sqrt{s l} \quad (7.47)$$

Optimální délka pomocné základny se tedy vypočítá jako odmocnina ze součinu hodnot měřené délky a délky základnové latě. Dosazením této hodnoty pro z do výrazu (7.46) se získá vzorec pro střední kvadratickou chybu

$$m_s^2 = s^2 \left(\frac{s l}{l^2} + \frac{s^2}{s l} \right) m_\delta^2 = s^2 \left(\frac{s}{l} + \frac{s}{l} \right) m_\delta^2 = \frac{2s^3}{l} m_\delta^2$$

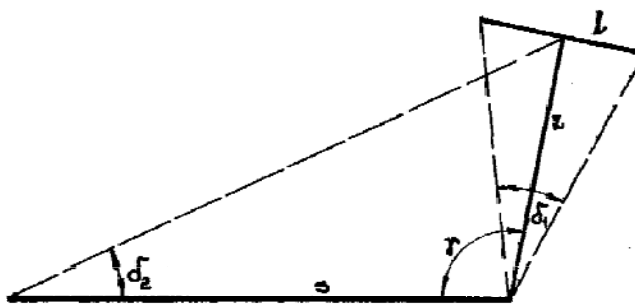
a po odmocnění konečný vzorec pro střední chybu určované délky

$$m_s = \sqrt{\frac{2s^3}{l}} m_\delta \quad (7.48)$$

Pro standardní délku základnové latě $l = 2 \text{ m}$ bude mít tento výraz tvar

$$m_s = \sqrt{s^3} m_\delta$$

d) pomocná základna na konci měřené délky v obecné poloze (Obr. 14)



Obr. 14 - Pomocná základna na konci v obecné poloze

Výpočetní vztah :

$$s = z \frac{\sin(\gamma + \delta_2)}{\sin \delta_2} = \frac{l}{2} \cot g \frac{\delta_1}{2} \frac{\sin(\gamma + \delta_2)}{\sin \delta_2} \quad (7.49)$$

 kde s je určovaná délka,

 l je skutečná délka základnové latě,

 δ_1, δ_2 jsou měřené paralaktické úhly,

 γ je úhel základny

Rozbor přesnosti :

 Obdobně jako v předcházejících případech je možné odvodit výrazy pro optimální délku pomocné základny z a střední chybu určované délky

$$z_{opt} = \sqrt{\frac{sl}{\sin \gamma}} \quad (7.50)$$

$$m_s = \sqrt{\frac{2s^3}{l \sin \gamma}} m_\delta \quad (7.51)$$

 Pro standardní délku základnové latě $l = 2 \text{ m}$ mají tyto výraz tvar

$$z_{opt} = \sqrt{\frac{2s}{\sin \gamma}}$$

$$m_s = \sqrt{\frac{s^3}{\sin \gamma}} m_\delta$$

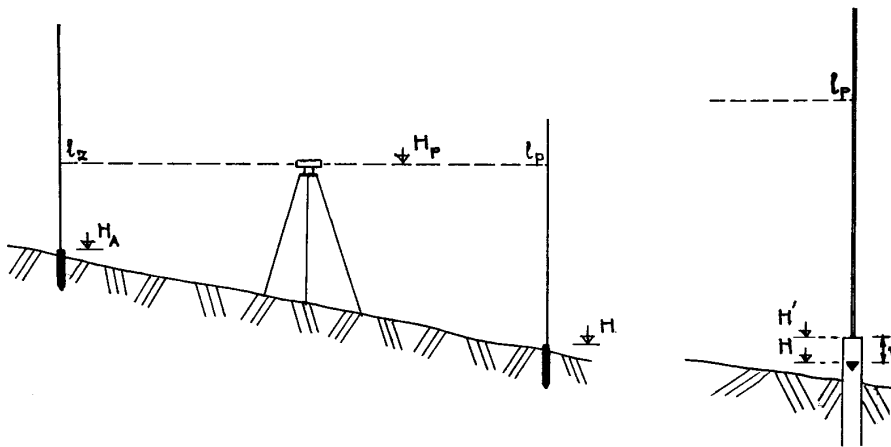
 Je zřejmé, že předcházející úloha je speciálním případem tohoto obecnějšího vztahu pro $\gamma = 90^\circ$.

7.3 Měření a vytyčování výšek

7.3.1 Vytyčení výšky nivelací

Postup vytyčení výšky nivelací je patrný z obr. XX. Niveláčnický pořad je navázán na bod o známé výšce (HVB, ČNS) a je veden ke staveništi daného objektu, kde je nově zřízena pomocná stabilizace (kolík apod.), nebo se využije jiných vhodných možností (sloup, stěna blízkého objektu aj.). Pokud je třeba vytyčit zadanou výškovou úroveň H , obvykle se nejdříve určí výška předběžné značky H' (např. hlavy kolíku, předběžné rysky) a poté se definitivní ryska získá odměřením výškového rozdílu (Obr. 15)

$$v = H - H' \quad (7.52)$$



Obr. 15 - Vytyčení výšky bodu nivelací

Vytyčovaná výška je dána funkčním vztahem

$$H = H_A + \sum_{i=1}^n (z_i - p_i) + v \quad (7.53)$$

kde H je určovaná (projektovaná) výška, H_A je výchozí výška, z_i , p_i jsou čtení vzad a vpřed v sestavě, n je počet sestav a v je doměřovaný výškový rozdíl.

Přesnost vytyčení výšky nivelací se uvažuje podle délky niveláčnického pořadu. Pokud je tato délka kratší než 0,5 km, je vhodné použít vzorec

$$m_H^2 = m_{H_A}^2 + n \cdot m_{h_i}^2 + m_v^2 \quad (7.54)$$

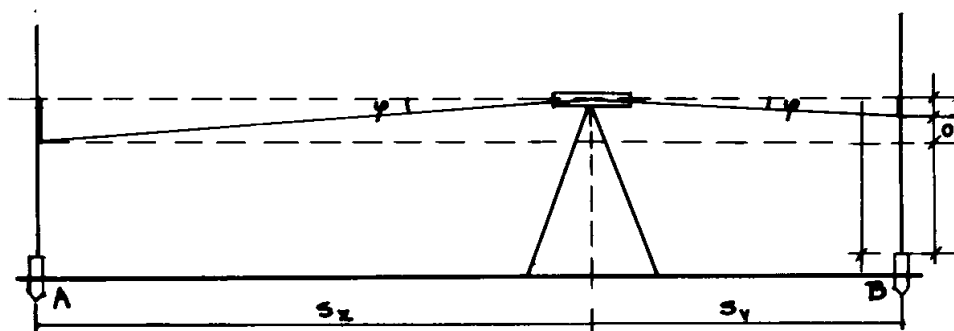
kde m_H je střední chyba vytyčené výšky, m_{H_A} je střední chyba výchozí výšky, n je počet niveláčnických sestav, m_{h_i} je střední chyba jedné sestavy, a m_v je střední chyba odměření rozdílu v a vyznačení výšky. Hodnoty m_{h_i} se uvažují v intervalech pro VPN 0,1 – 0,3 mm, pro PN 0,6 – 1,6 mm, a pro TN > 2 mm.

Při pořadech delších než 0,5 km se doporučuje používat standardní vzorec pro střední chybu nivelace

$$m_H^2 = m_{H_A}^2 + m_0^2 R_{km} + m_v^2 \quad (7.55)$$

kde m_0^2 je střední kilometrová chyba nivelace, R_{km} je délka nivelačního pořadu v km, a ostatní symboly mají stejný význam jako v předcházejícím případě. Hodnoty m_0^2 se uvažují v intervalech pro VPN 0,4 – 0,8 mm, pro PN 2 – 5 mm, a pro TN > 5 mm.

Poznámka: Při výškovém měření nebo vytyčování často nelze pro nedostatek prostoru dodržet zásadu stejně dlouhých záměr vzad a vpřed v sestavě. I při práci s rektifikovaným nivelačním přístrojem je pak třeba uvažovat vliv nevdorovnosti záměrné přímky (Obr. 16).



Obr. 16 - Nivelace se skloněnou záměrou

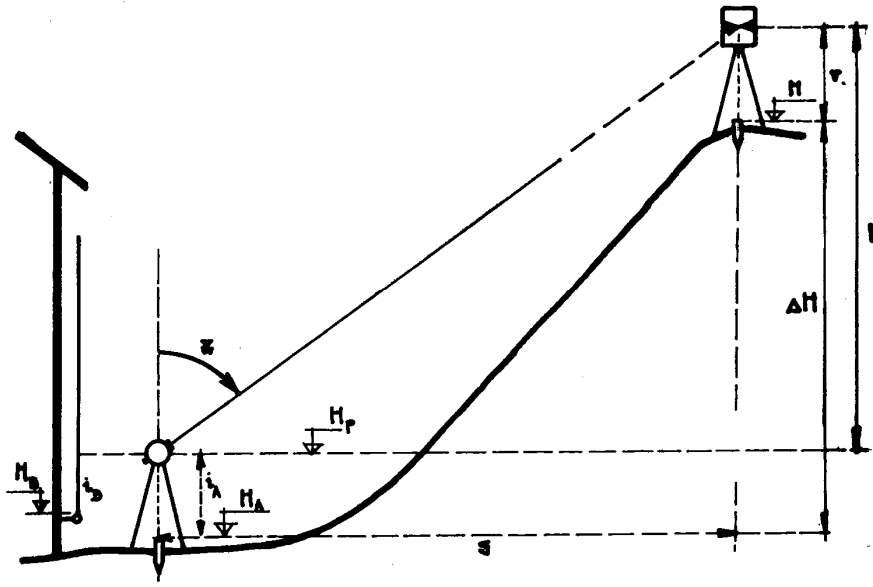
Správné čtení vpřed v sestavě l_p se vypočte podle vzorce

$$l_p = l_p' + o = l_p' + (s_y - s_x) \varphi \quad (7.56)$$

Úhel sklonu záměrné přímky φ se určí měřením na zkušební základně.

7.3.2 Vytyčení výšky trigonometricky

Princip vytyčení je zřejmý z Obr. 17:



Obr. 17 - Trigonometrické vytyčení výšky

Vytyčovaná výška je určena vztahem

$$H = H_A + \left[\frac{s \cdot \cot g z}{s' \cdot \cos z} \right] + i - v \quad , \quad (7.57)$$

který postačuje pro vytyčení do vzdálenosti 100 m. Při delších vzdálenostech s je třeba tento vztah rozšířit o další člen zohledňující vliv zakřivení horizontu a terestrické refrakce

$$H = H_A + \left[\frac{s \cdot \cot g z}{s' \cdot \cos z} \right] + i - v + \frac{s^2 (1 - k)}{2R} \quad . \quad (7.58)$$

V pravoúhlém výškovém trojúhelníku je měřena buď vodorovná vzdálenost s a v tom případě se použije horní člen v hranaté závorce, anebo šikmá vzdálenost s' a pak se použije spodní člen.

Přesnost trigonometrického vytyčení výšky lze odvodit pomocí zákonů hromadění skutečných a středních chyb. Diferencováním výrazu (7.58) dostaneme vztah pro skutečnou chybu vytyčované výšky

$$\varepsilon_H = \varepsilon_{H_A} + \left[\frac{\varepsilon_s \cot g z}{\varepsilon_{s'} \cos z} \right] - \left[\frac{s}{\sin^2 z} \varepsilon_z + \varepsilon_i - \varepsilon_v - \frac{s^2}{2R} \varepsilon_k \right] \quad (7.59)$$

a střední chyba bude

$$m_H^2 = m_{H_A}^2 + \left[\begin{array}{c} m_s^2 \cot^2 z \\ m_s^2 \cos^2 z \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \frac{s^2}{\sin^4 z} \\ s^{-2} \sin^2 z \end{array} \right] m_z^2 + m_i^2 + m_v^2 + \frac{s^4}{4R^2} m_k^2 \quad (7.60)$$

U výrazů v hranatých závorkách se použije horní nebo dolní člen tak, jak bylo uvedeno výše. Poslední člen v obou výrazech se zanedbá pro vzdálenosti s kratší než 100 m.

Poznámka : Při vytyčování na delší vzdálenosti se nelze spolehnout na střední hodnotu refrakčního koeficientu $k = 0,13$. Výzkumy prokázaly, že se jeho hodnota v průběhu roku i během dne mění v závislosti na stavu atmosféry a dalších faktorech (na výšce záměry nad terénem, na odrazivosti pokryvu terénu v bezprostřední blízkosti stanoviska, na počasí v předcházejících dnech aj.). Může nabývat hodnot v intervalu $-1 < k < 1$. Proto se obvykle počítá s jeho střední chybou $m_k = 0,5$.

Vytyčování výšek trigonometrickým způsobem se v praxi používá méně často, zpravidla tam, kde jsou vytyčované body nepřístupné, nebo je nivelační měření neekonomické (velké výškové rozdíly na krátké vzdálenosti). Ze vzorců (7.60) je zřejmé, že jak vliv chyby v měření vzdálenosti, tak vliv chyby svislého úhlu je nejmenší při vodorovné záměře ($z = 100$ gon). V tom případě platí pro relativní střední chybu vztah

$$m_H^2 = s^2 m_z^2 + m_i^2 + m_v^2 \quad (7.61)$$

Jsou-li trigonometricky měřeny výškové rozdíly mezi body, není třeba na stanovisku měřit výšku přístroje.

7.3.3 Základní výškové vytyčovací úlohy

Mezi jednoduché základní metody výškového vytyčování se řadí vytyčení přímky daného sklonu, vytyčení vodorovné a skloněné roviny, vytyčení vrstevnice, vytyčování profilů.

Vytyčení přímky daného sklonu je úloha, která se často vyskytuje v dopravním stavitelství. Jedná se o výškové vytyčení řady bodů v projektovaných nebo zvolených rozestupech (staničeních), které slouží k realizaci liniové stavby ve správném sklonu (viz. Obr.). Vytyčuje se buď pomocí nivelačního přístroje nebo pomocí teodolitu.

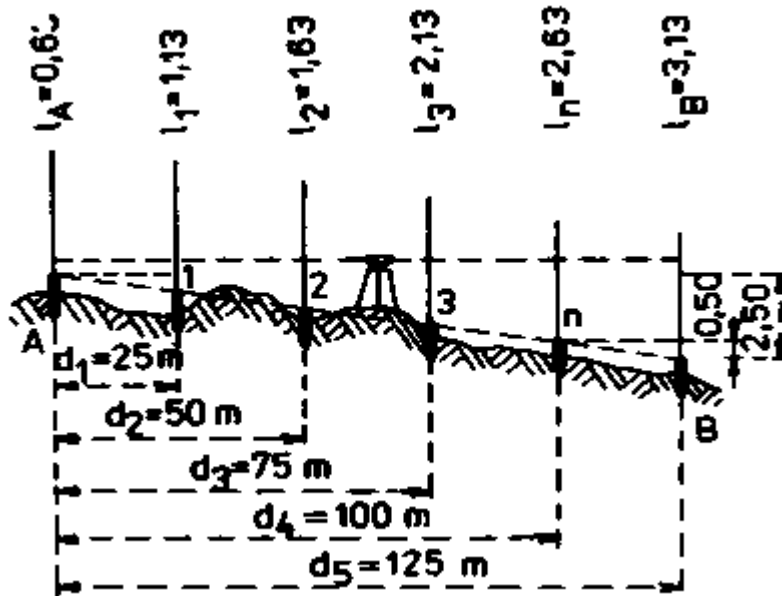
Sklon je zadáván buďto úhlem sklonu ε , nebo převýšením h na určitou vzdálenost s , nebo se často též vyjadřuje v procentech (%) či promilích (‰). Vztah mezi různými způsoby vyjadřování sklonu zprostředkuje vzorec

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{h}{s} = \frac{t(\%)}{100} = \frac{p(\text{‰})}{1000} \quad (7.62)$$

a odtud je možné vyjádřit výškový rozdíl

$$h = s \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{s t(\%)}{100} = \frac{s p(\text{‰})}{1000} \quad (7.63)$$

Vytyčení skloněné přímky nivelací (Obr. 18):



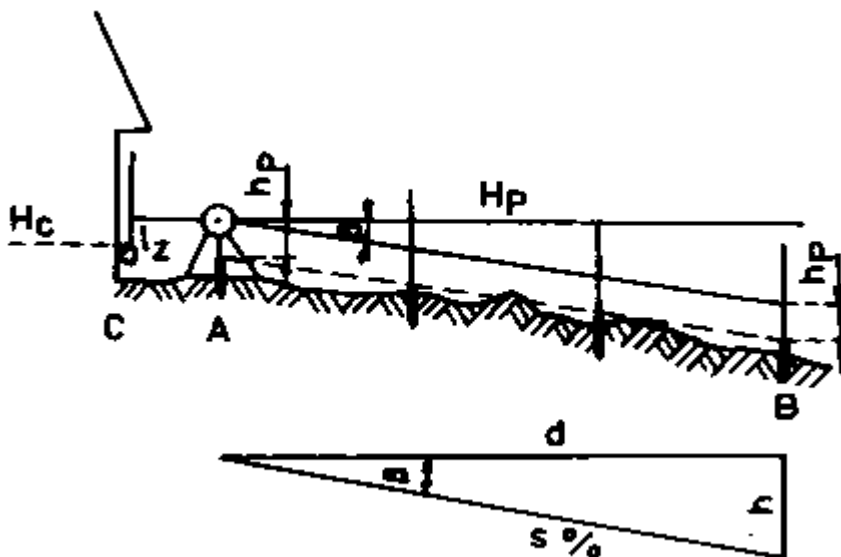
Obr. 18 - Vytyčení skloněné přímky nivelací

Výšky H_i mezilehlých bodů skloněné přímky P_i se získají ze vztahu

$$H_i = H_A + l_A - l_i + h_i \quad (7.64)$$

kde l_A je čtení latě na výchozím bodě o známé výšce H_A , l_i je čtení latě na hlavě kolíku a h_i je výškový rozdíl vypočtený podle (7.63). Musí být známy vzdálenosti (staničení) s_i jednotlivých bodů přímky.

Vytyčení skloněné přímky teodolitem (Obr. 19):

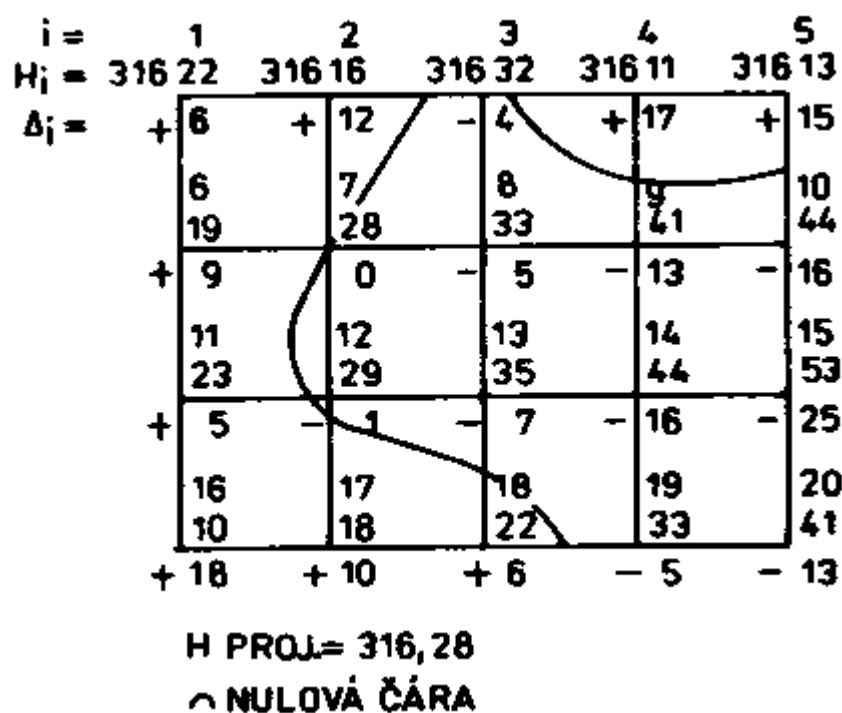


Obr. 19 - Vytyčení skloněné přímky teodolitem

Při vytyčování skloněné přímky teodolitem se přístroj centruje nad výchozím bodem o známé výšce H_A . Poté se dalekohled nastaví do požadovaného úhlu

sklonu. Při vytyčování výšek jednotlivých mezilehlých bodů skloněné přímky se využije rovnoběžnosti záměrné přímky a vytyčované skloněné přímky, z čehož vyplývá jejich konstantní svislá vzdálenost rovnající se výšce přístroje i nad stabilizační značkou výchozího bodu. Nemusí být tedy známy vzdálenosti (staničení) s_i jednotlivých bodů.

Vytyčení vodorovné roviny je úloha, která se často vyskytuje při realizaci plošných staveb, vodorovných konstrukcí či terénních úprav. Projektovaná výška H_P této roviny se často volí tak, aby se minimalizovaly objemy přemísťovaných kubatur zeminy. Úloha se řeší pomocí čtvercové sítě o stranách a v rozmezí 5 – 20 m. Rozměr a hustota sítě závisí na členitosti terénu a požadované přesnosti vytyčení, většinou tak, aby se výšky dalších mezibodů daly vytyčit běžnými stavebními postupy (shlížením, napnutým drátem či provazem, dlaždičským křížem) se zachováním dané přesnosti. Rohy čtverců se vyznačí kolíky, jejichž hlavy se zanelují. Pak se pro každý bod vypočte výškový rozdíl $h_i = H_P - H_i$.



Obr. 20 - Grafické schéma vytyčení vodorovné roviny

Součástí měřického elaborátu je *grafické schéma* (Obr. 20) ve kterém se kromě vypočtených rozdílů h_i vyznačí též čísla jednotlivých bodů, průběh *nulové čáry* apod. Často se elaborát doplňuje bilancí kubatur výkopů a násypů, kdy se dílčí objemy v jednotlivých čtvercích sítě počítají podle vzorce

$$V_i = P \frac{\sum_1^4 h_j}{4} = a^2 \frac{\sum_1^4 h_j}{4} \quad (7.65)$$

V současnosti narůstá rozsah používání *laserových rotačních nivelačních přístrojů* poskytujících viditelnou stopu vodorovné roviny, což zvyšuje ekonomičnost vytyčovacích prací.

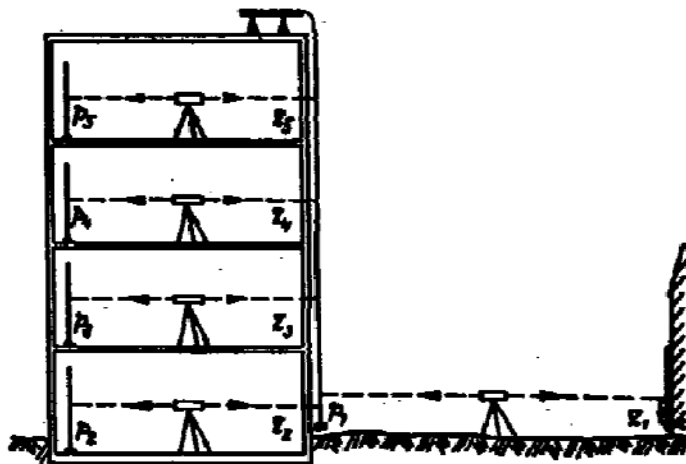
Vytyčení roviny daného sklonu je úloha, která se často vyskytuje např. při provádění terénních úprav. Zadáni úlohy může být následující:

- zadána vodorovná výchozí přímka a hodnota sklonu v příčném směru,
- zadána výška jednoho bodu a hodnoty sklonu ve dvou vzájemně kolmých směrech,
- zadány výšky trojice bodů.

Opět se použije čtvercová síť. Ve všech případech lze řešení převést na úlohu vytyčování soustav rovnoběžných přímek se stejným sklonem, který je buď přímo zadán, nebo se vypočítá.

Vytyčení průběhu vrstevnice je úloha vyskytující se při průzkumných hydrotechnických pracích (např. při výstavbě vodních nádrží – vytyčení zátopové čáry). Řešení spočívá v nalezení horizontální polohy řady bodů vrstevnice o dané výšce. Pospojováním pak lze vyznačit průběh vrstevnice v terénu.

Vytyčování velkých výškových rozdílů se používá např. při potřebě přenášet výšky do jednotlivých podlaží stavebních objektů. K výškovému měření se zde použije svisle zavěšené pásmo, které představuje prodlouženou nivelační lať (Obr. 21). Běžně lze takto dosahovat přesností na úrovni technické nivelace (TN). Při požadavcích vyšší přesnosti je tento postup komplikovanější, je třeba uvážit některé systematické vlivy (zejména komparace, teplota, protažení pásma).



Obr. 21 - Vytyčování výšek pomocí zavěšeného pásma

8 Vytyčování přímek, kolmic a rovnoběžek

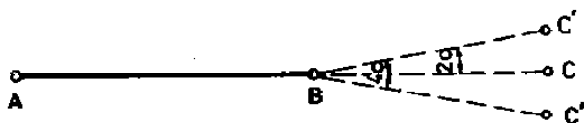
Při vytyčení přímky se vytyčovaný bod zařazuje do přímky dané dvěma výchozími body. Rozlišuje se vytyčení přímky uvnitř (mezilehlý bod) a vně (bod v prodloužení přímky) úsečky vymezené výchozími body.

8.1 Jednoduché metody

8.1.1 Jednoduché vytyčování přímek

Jedná se o následující postupy:

- zařazení bodu do přímky od oka (shlížením) – používá se pro hrubá vytyčení, kde postačí decimetrová přesnost
- zařazení bodu do přímky pomocí vytyčovacího hranolu (pentagonu) – výhodné je zde použití dvojitého hranolu či pentagonu, dosahovaná přesnost je závislá na vzdálenosti zařazovaného bodu od výchozích bodů přímky a pohybuje se v rozmezí 2 – 5 cm.
- zařazení bodu do přímky teodolitem bez úhlového měření – zde je třeba dbát na možnou přítomnost kolimační chyby přístroje a provádět vytyčení v obou polohách dalekohledu, zejména při prodlužování přímky na delší vzdálenost (Obr. 22).

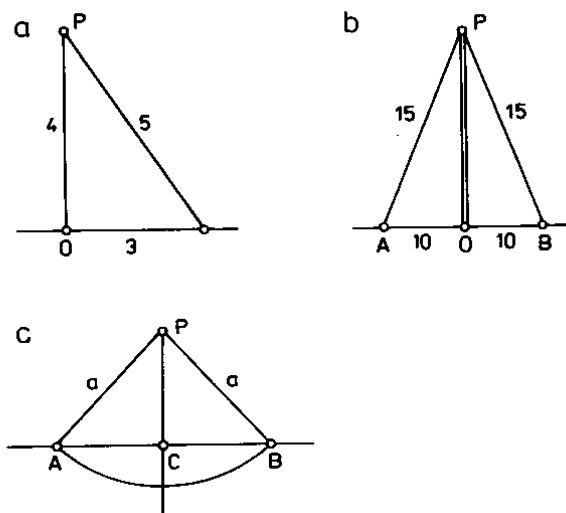


Obr. 22 - Zařazení bodu do přímky teodolitem

8.1.2 Jednoduché vytyčování kolmic

Jedná se o následující postupy:

- vytyčení kolmice pomocí pásma – použije se Pythagorova věta, nebo se použije vztahů pro rovnoramenný trojúhelník (Obr. 23)
- vytyčení kolmice pomocí vytyčovacího hranolu (pentagonu) – dříve často používaný postup vytyčování kolmic na stavbách, je třeba dodržet maximální povolenou délku kolmice s ohledem na přesnost vytyčení pravého úhlu hranolem ($m_\omega = 2'$)

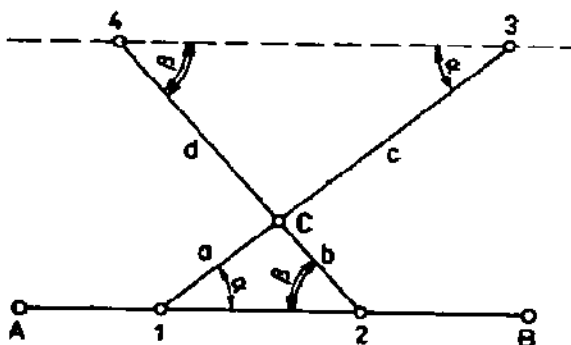


Obr. 23 - Jednoduché metody vytyčení kolmice

8.1.3 Jednoduché vytyčování rovnoběžek

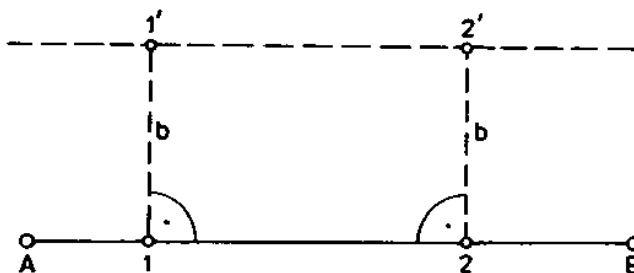
Jedná se o následující postupy:

- vytyčení rovnoběžky pomocí pásma – použije se schématu podle Obr. 24, které využívá podobnosti trojúhelníků



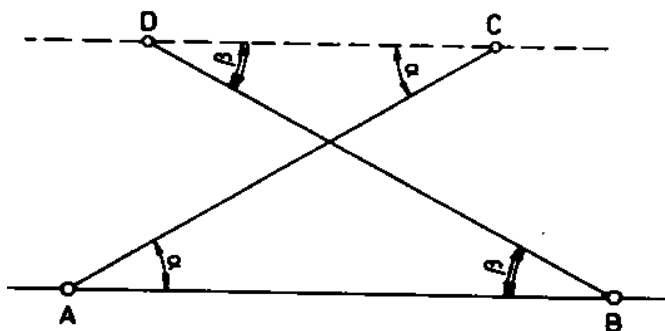
Obr. 24 - Vytyčení rovnoběžky pomocí pásma

- vytyčení rovnoběžky pomocí vytyčovacího hranolu (pentagonu) a pásma – běžně používaný postup vytyčování rovnoběžek, v podstatě se jedná o vytyčení dvojice bodů na výchozí přímce, v nichž se vytyčí kolmice a na ně se nanese shodná vzdálenost rovnající se požadovanému rozestupu rovnoběžek (Obr. 25)

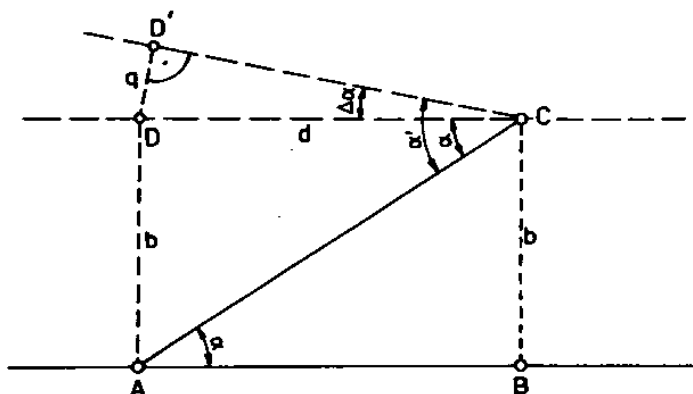


Obr. 25 - Vytyčení rovnoběžky pomocí kolmic

- vytyčení rovnoběžky pomocí teodolitu – využívá se pravidla, že přímka protínající rovnoběžky svírá s oběma shodný úhel, při praktickém řešení se teodolitem umístěným na bodě výchozí přímky změří úhel na zvolený bod kterým má procházet rovnoběžka a poté se na tomto bodě tentýž úhel vytyčí (Obr. 26). Při tomto postupu je možné dosáhnout plánované přesnosti vytyčení směru rovnoběžky, použijí-li se zásady postupu měření a vytyčování úhlů s požadovanou přesností (Obr. 27)



Obr. 26 - Vytyčení rovnoběžky úhlovým měřením



Obr. 27 - Vytyčení rovnoběžky se zadanou přesností

8.2 Vytyčení přímky s požadovanou přesností

Výchozí body jsou buď přístupné, anebo nepřístupné. Vzdálenosti vytyčovaného bodu od výchozích bodů přímky jsou buď známé, anebo neznámé. Vytyčuje se postupnou aproximací, kdy se nejdříve vytyčí předběžná poloha bodu přímky, následuje úhlové měření a výpočet vzdálenosti (příčného posunu) bodu od dané přímky. O tom, zda se ponechá výsledná poloha, nebo se ještě opraví, rozhodne výsledek kontrolního měření.

V textu této kapitoly je použito následující značení:

A, B - výchozí body určující danou přímku,

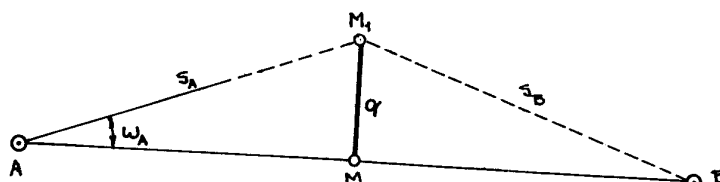
M, M_I - vytyčovaný mezilehlý bod přímky AB , resp. jeho předběžná poloha,

s_A, s_B - vzdálenosti vytyčovaného bodu od výchozích bodů přímky A, B ,

- ω - úhel měřený na výchozím nebo určovaném bodě měřený tak, že směr na výchozí bod A je jeho levým ramenem a směr na výchozí bod B je jeho pravým ramenem,
- q - orientovaný příčný posun vytyčovaného bodu z předběžné do definitivní polohy.

8.2.1 Vytyčení mezilehlého bodu přímky

a) výchozí body jsou přístupné Obr. 28:



Obr. 28 - Vytyčení mezilehlého bodu přímky ad a)

V blízkosti vytyčovaného bodu M se zřídí jeho předběžná (dočasná) značka M_1 . Pak se změří vzdálenosti s_A, s_B a úhel ω_A na bodě A . Příčný posun q se vypočte podle vztahu

$$q = s_A \sin \omega_A \approx s_A \omega_A \quad (8.1)$$

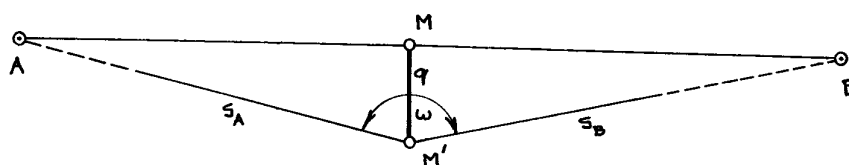
Přesnost (střední chyba) příčného posunu m_q se odvodí diferencováním výše uvedeného vztahu podle zákona hromadění skutečných a středních chyb

$$m_q^2 = s_A^2 m_\omega^2 + \frac{s_B^2}{(s_A + s_B)^2} m_e^2 = s_A^2 m_\omega^2 + \frac{s_B^2}{s_{A,B}^2} m_e^2 \quad (8.2)$$

kde m_e je střední chyba centrace teodolitu

Praktická doporučení: Pokud je to možné, vytyčuje se vždy z bližšího výchozího bodu. Důležitá je přesná centrace zvláště ve směru kolmém k vytyčované přímce. Příčný posun q je třeba vytyčit se správnou orientací – je-li kladný, vytyčuje se směrem doprava, je-li záporný, směrem doleva od předběžné polohy (při pohledu od teodolitu). Výsledek vytyčení je třeba ověřit kontrolním přeměřením úhlu ω_A .

b) výchozí body jsou nepřístupné a vzdálenosti s_A, s_B jsou známé (Obr. 29):



Obr. 29 - Vytyčení mezilehlého bodu přímky ad b)

V blízkosti vytyčovaného bodu M se zřídí jeho předběžná (dočasná) značka M_1 . Pak se změří vzdálenosti s_A, s_B a úhel ω na bodě M_1 . Pro výpočet

příčného posunu se využije vzorce pro výpočet dvojnásobné plochy trojúhelníka ABM_1

$$2P = s_A s_B \sin \omega = (s_A + s_B) q$$

a odtud

$$q = \frac{s_A s_B}{s_A + s_B} \sin \omega \approx \frac{s_A s_B}{s_A + s_B} (2R - \omega) \quad (8.3)$$

Přesnost (střední chyba) příčného posunu m_q se odvodí diferencováním výše uvedeného vztahu podle zákona hromadění skutečných a středních chyb

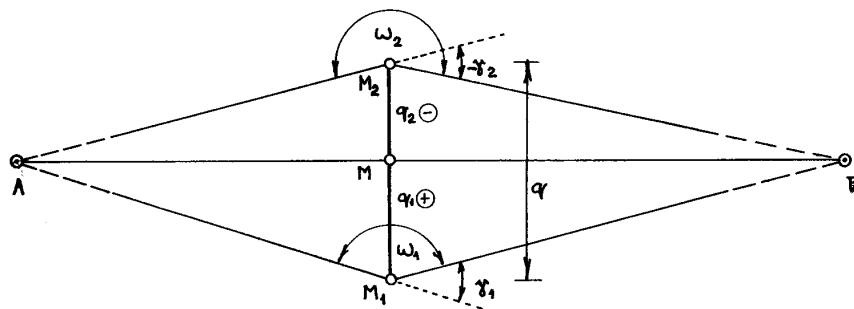
$$m_q^2 = \frac{s_A^2 s_B^2}{(s_A + s_B)^2} m_\omega^2 + m_e^2 \quad (8.4)$$

kde m_e je opět střední chyba centrace teodolitu. Pro bod uprostřed úsečky AB ($s_A = s_B$) nabývá tento výraz maxima

$$m_{q(\max)}^2 = \frac{s_A^2}{4} m_\omega^2 + m_e^2 = \frac{s_{A,B}^2}{16} m_\omega^2 + m_e^2 \quad (8.5)$$

Praktická doporučení: Nejméně přesné je vytyčení mezilehlého bodu uprostřed úsečky dané výchozími body, směrem ke koncovým bodům roste. Příčný posun q je třeba vytyčit se správnou orientací – je-li kladný, vytyčuje se směrem dovnitř, je-li záporný, směrem vně úhlu ω . V porovnání s předcházejícím způsobem se dosahuje poněkud vyšší přesnosti. Výsledek vytyčení je třeba ověřit kontrolním přeměření úhlu ω .

c) výchozí body jsou přístupné a vzdálenosti s_A, s_B jsou neznámé (Obr. 30):



Obr. 30 - Vytyčení mezilehlého bodu přímk ad c)

V blízkosti vytyčovaného bodu M se zřídí dvě předběžné (dočasné) značky M_1, M_2 . Pak se změří vzdálenost mezi nimi q a úhly ω_1, ω_2 . Pro výpočet příčných posunů q_1, q_2 se využije vzorců

$$q_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} q, \quad q_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} q \quad (8.6)$$

kde $\gamma_1 = 2R - \omega_1, \gamma_2 = 2R - \omega_2$. Za předpokladu stejné přesnosti měřených úhlů ($m_{\omega_1} \approx m_{\omega_2} = m_\omega$) jsou střední chyby příčných posunů q_1, q_2 dány vztahy

$$m_{q_1}^2 = \left(\frac{q_1}{q}\right)^2 m_q^2 + \frac{q_1^2 + q_2^2}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2} m_\omega^2 \quad (8.7)$$

$$m_{q_2}^2 = \left(\frac{q_2}{q}\right)^2 m_q^2 + \frac{q_1^2 + q_2^2}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2} m_\omega^2 \quad (8.8)$$

Vliv prvního členu v těchto rovnicích je prakticky zanedbatelný, neboť úsečku q je možné změřit relativně přesně. Pak záleží výsledná přesnost především na přesnosti úhlového měření

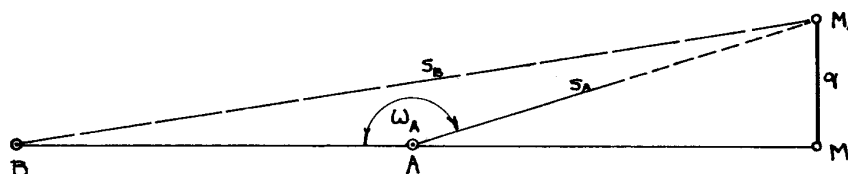
$$m_{q_{1,2}}^2 = \frac{q_1^2 + q_2^2}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2} m_\omega^2 \quad (8.9)$$

Praktická doporučení: Předběžné body M_1, M_2 mohou být umístěny libovolně, lépe však na opačných stranách od přímky AB . Přesnost vytyčení roste se zvětšováním úsečky q , zvyšuje se tím však obtížnost praktického vytyčení příčných posunů q_1, q_2 . Proto se obvykle volí $q < 10$ m. Problémem zde je, že rozbor přesnosti před měřením nelze provést (body M_1, M_2 se volí až na místě měření). Obvyklým postupem je odměření úhlů ω_1, ω_2 v jedné skupině, výpočet předběžných hodnot q_1, q_2 , provedení rozboru přesnosti a případné doměření dalších úhlových skupin.

Posuny je třeba vytyčit se správnou orientací – je-li posun kladný, vytyčuje se směrem dovnitř a je-li posun záporný, vytyčuje se směrem vně příslušného úhlu. Vytyčený mezilehlý bod m je třeba zkontrolovat tak, že se na něm přeměří přímý úhel.

8.2.2 Vytyčení bodu v prodloužení přímky

a) výchozí body jsou přístupné (Obr. 31):



Obr. 31 - Vytyčení mezilehlého bodu přímky ad a)

V blízkosti vytyčovaného bodu M se zřídí jeho předběžná (dočasná) značka M_1 . Pak se změří vzdálenosti s_A, s_B a úhel ω_A na bodě A . Příčný posun q se vypočte podle vztahu

$$q = s_A \sin \omega_A \approx s_A (2R - \omega_A) \quad (8.10)$$

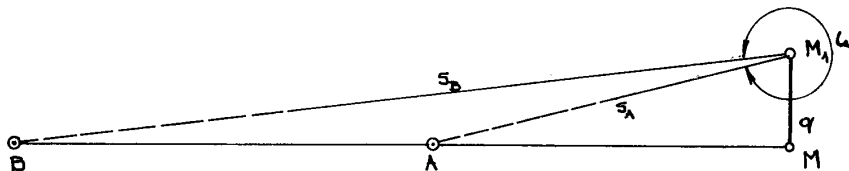
Přesnost (střední chyba) příčného posunu m_q se odvodí diferencováním výše uvedeného vztahu podle zákona hromadění skutečných a středních chyb

$$m_q^2 = s_A^2 m_\omega^2 + \frac{s_B^2}{(s_B - s_A)^2} m_e^2 = s_A^2 m_\omega^2 + \frac{s_B^2}{s_{A,B}^2} m_e^2 \quad (8.11)$$

kde m_e je střední chyba centrace teodolitu

Praktická doporučení: Při prodlužování přímky narůstá rychle vliv nepřesné centrace teodolitu zvláště ve směru kolmém k vytyčované přímce. Příčný posun q je třeba vytyčit se správnou orientací – je-li kladný, vytyčuje se směrem doprava, je-li záporný, směrem doleva od předběžné polohy (při pohledu od teodolitu). Výsledek vytyčení je třeba ověřit kontrolním přeměřením úhlu $\omega_A = 2R$.

b) výchozí body jsou nepřístupné a vzdálenosti s_A, s_B jsou známé (Obr. 32):



Obr. 32 - Vytyčení mezilehlého bodu přímky ad b)

V blízkosti vytyčovaného bodu M se zřídí jeho předběžná (dočasná) značka M_1 . Pak se změří vzdálenosti s_A, s_B a úhel ω na bodě M_1 . Pro výpočet příčného posunu se využije vzorce pro výpočet dvojnásobné plochy trojúhelníka ABM_1

$$2P = s_A s_B \sin \omega = (s_B - s_A) q$$

a odtud

$$q = \frac{s_A s_B}{(s_B - s_A)} \sin \omega = \frac{s_A s_B}{s_{A,B}} \sin \omega \approx \frac{s_A s_B}{s_{A,B}} \omega \quad (8.12)$$

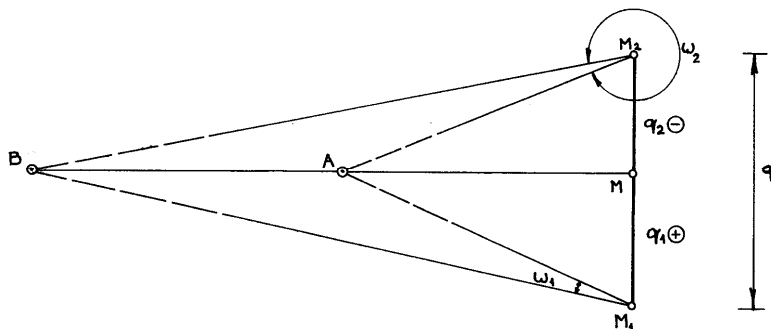
Přesnost (střední chyba) příčného posunu m_q se odvodí diferencováním výše uvedeného vztahu podle zákona hromadění skutečných a středních chyb

$$m_q^2 = \frac{s_A^2 s_B^2}{(s_B - s_A)^2} m_\omega^2 + \frac{s_A^2}{(s_B - s_A)^2} m_e^2 = \frac{s_A^2 s_B^2}{s_{A,B}^2} m_\omega^2 + \frac{s_A^2}{s_{A,B}^2} m_e^2 \quad (8.13)$$

kde m_e je opět střední chyba centrace teodolitu.

Praktická doporučení: Příčný posun q je třeba vytyčit se správnou orientací. Výsledek vytyčení je třeba ověřit kontrolním přeměřením úhlu $\omega = 0$.

c) výchozí body jsou přístupné a vzdálenosti s_A, s_B jsou neznámé (Obr. 33):



Obr. 33 - Vytyčení mezilehlého bodu přímky ad c)

V blízkosti vytyčovaného bodu M se zřídí dvě předběžné (dočasné) značky M_1, M_2 . Pak se změří vzdálenost mezi nimi q a úhly ω_1, ω_2 . Pro výpočet příčných posunů q_1, q_2 se využije vzorců

$$q_1 = \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} q, \quad q_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} q \quad (8.14)$$

kde $\omega_1 = \text{úhel } AM_1B$, $\omega_2 = \text{úhel } AM_2B$. Je-li některý z úhlů ω větší než $2R$, bere se namísto něj do výpočtu úhel $\omega' = \omega - 4R$. Za předpokladu stejné přesnosti měřených úhlů ($m_{\omega_1} \approx m_{\omega_2} = m_\omega$) jsou střední chyby příčných posunů q_1, q_2 dány vztahy

$$m_{q_1}^2 = \left(\frac{q_1}{q}\right)^2 m_q^2 + \frac{q_1^2 + q_2^2}{(\omega_1 - \omega_2)^2} m_\omega^2$$

$$m_{q_2}^2 = \left(\frac{q_2}{q}\right)^2 m_q^2 + \frac{q_1^2 + q_2^2}{(\omega_1 - \omega_2)^2} m_\omega^2$$

Vliv prvního členu v těchto rovnicích je prakticky zanedbatelný, neboť úsečku q je možné změřit relativně přesně. Pak záleží výsledná přesnost především na přesnosti úhlového měření

$$m_{q_{1,2}}^2 = \frac{q_1^2 + q_2^2}{(\omega_1 - \omega_2)^2} m_\omega^2 \quad (8.15)$$

Lze-li přibližně odhadnout velikost podílu

$$k = \frac{s_A}{s_B - s_A} = \frac{s_A}{s_{A,B}} \quad (8.15)$$

výraz (8.15) přejde na tvar

$$m_{q_{1,2}}^2 = \frac{(q_1^2 + q_2^2) k^2 (k+1)^2 s_{A,B}^2}{q^2} m_\omega^2 \quad (8.16)$$

Praktická doporučení: Předběžné body M_1, M_2 mohou být umístěny libovolně, lépe však na opačných stranách od přímky AB . Přesnost vytyčení roste se zvětšováním úsečky q , zvyšuje se tím však obtížnost praktického vytyčení příčných posunů q_1, q_2 . Proto se obvykle volí $q < 10$ m. Rozbor přesnosti se provádí stejně jako v případě vytyčování mezilehlého bodu. Posuny je třeba vytyčit se správnou orientací – je-li posun kladný, vytyčuje se směrem doprava a je-li posun záporný, vytyčuje se směrem doleva při pohledu směrem k bodu B . Vytyčený mezilehlý bod m je třeba zkontrolovat tak, že se na něm přeměří přímý úhel.

9 Vytyčení svislice

Vytyčování svislic je častou úlohou inženýrské geodézie při přenášení polohy bodů mezi různými výškovými úrovněmi stavebních objektů. V praxi se používají tři základní metody vytyčení svislice – mechanické provažování, optické promítání a optické provažování.

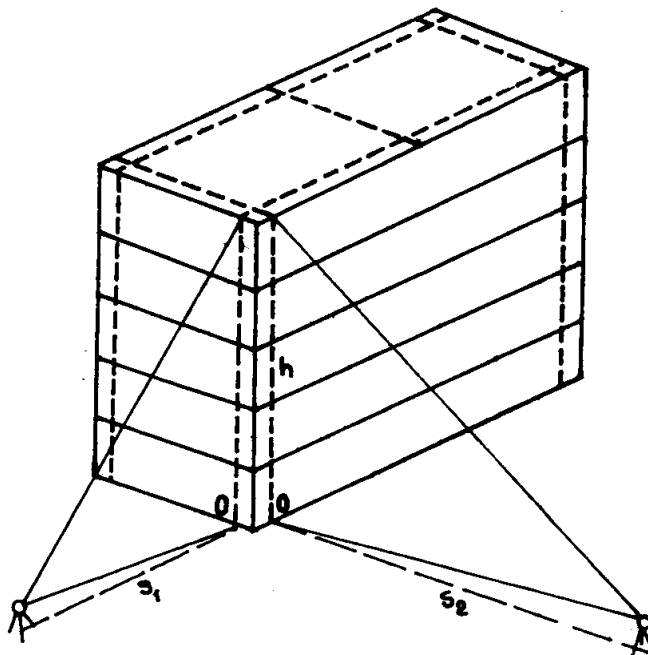
9.1 Vytyčení svislice mechanickým provážením

Při mechanickém provažování se bod na svislici výchozího bodu provažuje pomocí olovnice přiměřené hmotnosti a odpovídající délky závěsu. Ve stavební praxi se tato metoda používá běžně pouze při malých výškových rozdílech ($h < 10$ m). Přesnost vytyčení je charakterizována střední souřadnicovou chybou bodu na svislici $m_{x,y} > 5$ mm. Nepříznivě zde působí vnější vlivy (proudění vzduchu apod.).

Při provažování na větší výškové rozdíly vyžaduje tato metoda zvláštní vybavení, je pracná, časově náročná a tím i málo ekonomická.

9.2 Vytyčení svislice optickým promítáním

Při této metodě se svislice výchozího bodu vytyčuje jako průsečnice dvou (nejlépe navzájem kolmých) svislých rovin. Tyto roviny obsahují záměry na výchozí (orientační) bod v úrovni základů objektu a jsou vytyčovány dvěma teodolity umístěnými v potřebných vzdálenostech od vytyčované svislice (Obr. 34).



Obr. 34 - Vytyčení svislice optickým promítáním

Přesnost vytyčeného bodu svislice se posuzuje podle střední souřadnicové chyby

$$m_{x,y}^2 = h^2 m_{uv}^2 + \frac{s_1^2 + s_2^2}{2} m_z^2 + m_{st}^2 \quad (9.1)$$

kde h je výška promítání, s_1, s_2 jsou vzdálenosti teodolitů od vytyčované svislice, m_{uv} je střední chyba urovnání osy alhidády do svislice, m_z je střední chyba zacílení na orientační bod, a m_{st} je střední chyba vyznačení průsečíku vytyčených směrů na úrovni vytyčovaného bodu.

Střední chyba m_{uv} je při použití alhidádové libely dána výrazem

$$m_{uv} = f m_l \quad (9.2)$$

a při urovnání teodolitu pomocí automatického indexu svislého kruhu

$$m_{uv} = \sqrt{m_o^2 + m_u^2} \quad (9.3)$$

kde m_o je střední chyba čtení svislého kruhu a m_u je střední chyba urovnání automatického indexu.

Pro dosažení optimálních výsledků vytyčení je třeba dodržet dostatečný odstup postavení teodolitů od vytyčované svislice, který má být pokud možno v rozmezí $h < s < 2h$. Nevýhodou je, že se při této metodě svislice nevytyčuje přímo, ale zprostředkovaně jako průsečík dvou směrů, na který navíc nebývá přímo vidět. K tomu, aby nedošlo ke ztrátě přesnosti vytyčení při konstrukci průsečíku směrů na vytyčovacím horizontu, je důležité řádně zaškolit pomocníka. Prakticky se tímto postupem dosahuje střední chyby vytyčení svislice $m_{x,y} = 1 - 2$ mm, tato přesnost však klesá s rostoucí výškou h .

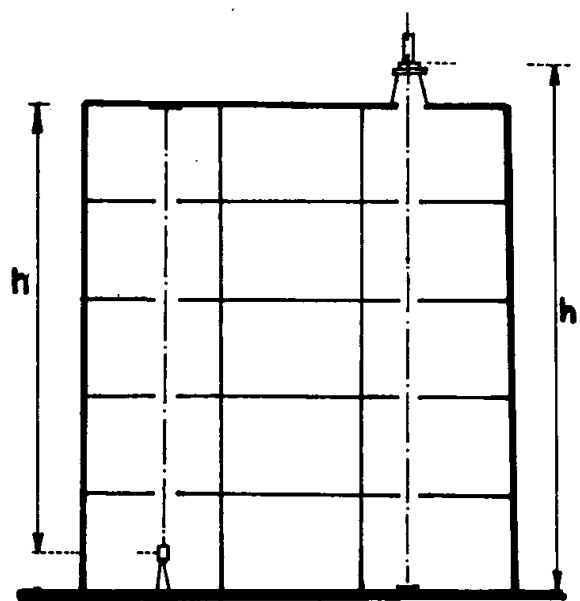
9.3 Vytyčení svislice optickým provažováním

K vytyčení se používá speciální přístroj – optický provažovač. Svislice se vytyčuje jako průsečnice dvou navzájem kolmých svislých rovin, které se vytyčují vodorovnou ryskou záměrného kříže optického provažovače směrem nad přístroj (zenitový provažovač), nebo pod přístroj (nadirový provažovač) (Obr. 35). S ohledem na vyloučení systematických chyb se každé měření provádí ve dvou o 2R rozdílných polohách alhidády. Bod svislice se realizuje buď čtením plošné milimetrové stupnice (rastru) nanesené na průhledném materiálu, nebo se nastavuje na zvláštním cílovém zařízení.

Přesnost vytyčeného bodu svislice se posuzuje podle střední souřadnicové chyby podle vzorce

$$m_{x,y}^2 = m_{x,y(e)}^2 + m_{x,y(op)}^2 + m_{st}^2 \quad (9.4)$$

kde $m_{x,y(e)}$ je střední souřadnicová chyba chyby centrace optického provažovače nad výchozím bodem, $m_{x,y(op)}$ je střední souřadnicová chyba vytyčení svislice optickým provažovačem uvedená v technických údajích přístroje, a m_{st} je střední souřadnicová chyba stabilizace výsledku vytyčení (čtení rastru nebo nastavení cílové značky).



Obr. 35 - Vytyčení svislice zenitovým a nadirovým optickým provažováním

10 Metodika vytyčování horizontální polohy

Vytyčením horizontální polohy bodu se rozumí zřízení vytyčovací značky bodu podle jeho projektových souřadnic vzhledem k primárnímu systému stavby (vytyčovací síti). Základní jednoduché metody vytyčení polohy bodu jsou takové, kdy je poloha bodu určena pomocí nezbytného počtu veličin (tj. bez vyrovnání). Jiné dále používané metody pracují s nadbytečným počtem vytyčovaných veličin, nebo používají zvláštních postupů.

Rozbory přesnosti polohových vytyčení pracují s dvojrozměrným rozdělením pravděpodobností, protože pro vyjádření polohy bodu v rovině je třeba dvou parametrů – obvykle pravoúhlých souřadnic x , y . Vytyčení vychází z výchozích (daných) bodů primárního systému stavby (vytyčovací sítě). Podle toho, zda se při rozboru uvažuje pouze vliv chyb vlastního vytyčení, nebo se uvažuje i vliv chyb souřadnic výchozích bodů, rozlišuje se relativní přesnost anebo souhrnná přesnost vytyčení. K těmto rozborům přesnosti se používá zákonů hromadění skutečných a středních chyb, nyní ovšem v modifikované podobě pro dvojrozměrné chyby.

V následujícím textu bude používáno toto označení :

- n - počet měřených (vytyčovaných) veličin,
- k - počet výchozích (daných) bodů,
- r - počet současně určovaných cílových parametrů,
- l_i - měřená (vytyčovaná) veličina,
- x_i - určovaný parametr,
- x_{A_i} - výchozí parametr,
- ε_i - skutečná chyba,
- m_i - střední chyba,
- \mathbf{H} - matice parciálních derivací (Jacobiho matice),
- \mathbf{E} - vektor skutečných chyb,
- \mathbf{M}^2 - kovarianční matice
- d - dimenze pracovního prostoru (pro rovinu $d = 2$)

10.1 Zákony souhrnného hromadění chyb

Měřická (vytyčovací) úloha představuje souhrn výchozích prvků, určovaných prvků a měřených veličin, které jsou vzájemně svázány vztahy představujícími matematický model úlohy. Tyto vztahy jsou obecně nelineární. Pro účely chybové analýzy je účelné je linearizovat, např. pomocí Taylorova rozvoje (pokud jsou splněny příslušné podmínky konvergence) s omezením pouze na lineární členy.

Cílové parametry x_i jsou pak vyjádřeny jako analytické lineární funkce měřených veličin a výchozích parametrů (souřadnic výchozích bodů)

$$x_i = f_i(l_1, l_2, \dots, l_n, x_{A_1}, x_{A_2}, \dots, x_{A_{dk}}) \quad (10.1)$$

Odvození zákonů souhrnného hromadění chyb bude provedeno pro větší názornost ve dvou oddělených variantách:

- a) výchozí body jsou brány jako bezchybné a uvažuje se pouze vliv chyb měřených veličin (*relativní přesnost*)

Skutečná chyba jednotlivého určovaného parametru x_i bude dána známým vztahem

$$\varepsilon_{x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial l_j} \varepsilon_{l_j} = \sum_{j=1}^n h_{ij} \varepsilon_{l_j} \quad (10.2)$$

Pro vyjádření skutečných chyb r určovaných parametrů by bylo třeba r takových rovnic. Výhodnější je použít úspornějšího maticového zápisu zákona hromadění skutečných chyb ve tvaru

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{H}_L \mathbf{E}_L \quad (10.3)$$

kde \mathbf{E}_x je vektor skutečných chyb měřených veličin, \mathbf{E}_L je vektor skutečných chyb určovaných parametrů, a \mathbf{H}_L je Jacobiho matice, jejímiž prvky jsou parciální derivace h_{ij} podle rovnice (10.2).

$$\mathbf{E}_L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_x = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_1} \\ \varepsilon_{x_2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{x_r} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial l_1} & \frac{\partial f_1}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial l_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial l_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial l_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial l_n} \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

Střední chyba jednotlivého určovaného parametru x_i je pak dána vztahem

$$m_{x_i}^2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial l_j} \right)^2 m_{l_j}^2 = \sum_{j=1}^n h_{ij}^2 m_{l_j}^2 \quad (10.5)$$

S touto mírou přesnosti se však vystačí pouze pro jednorozměrné chyby. Pro vyjádření přesnosti v případě vícerozměrného rozdělení pravděpodobností chyb se musí uvažovat ještě vzájemné kovariance mezi parametry

$$m_{x_i x_j}^2 = \sum_{u=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial l_u} \frac{\partial f_j}{\partial l_u} m_{l_u}^2 = \sum_{j=1}^n h_{iu} h_{ju} m_{l_u}^2 \quad (10.6)$$

Úplnou charakteristikou přesnosti je pak *kovarianční matice*

$$\mathbf{M}_x^2 = \begin{bmatrix} m_{x_1}^2 & m_{x_1 x_2} & \dots & m_{x_1 x_r} \\ m_{x_2 x_1} & m_{x_2}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{x_r x_1} & \dots & \dots & m_{x_r}^2 \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

na jejíž hlavní diagonále jsou střední chyby (variance) jednotlivých určovaných parametrů a na zbývajících místech jsou jejich vzájemné kovariance.

Poznámka: Vzájemně závislé jsou i parametry vypočtené z nezávislých měření, jedná se o početní korelaci, neboť se jednotlivá měření podílejí na určení více výsledných parametrů.

Maticový zápis zákona hromadění středních chyb je pak

$$\mathbf{M}_x^2 = \mathbf{H}_L \mathbf{M}_L^2 \mathbf{H}_L^T \quad (10.8)$$

kde \mathbf{M}_L^2 je kovarianční matice měřených veličin vyjadřující jejich přesnost. Pro vzájemně nezávislá (nekorelovaná) měření má tato matice tvar

$$\mathbf{M}_L^2 = \begin{bmatrix} m_{l_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{l_2}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & m_{l_n}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{diag}[m_{l_i}^2] \quad (10.9)$$

- b) měřené veličiny jsou brány jako bezchybné a uvažuje se pouze vliv chyb výchozích bodů

Skutečná chyba jednotlivého určovaného parametru x_i bude opět dána známým vztahem

$$\varepsilon_{x_i} = \sum_{j=1}^{dk} \frac{\partial f_i}{\partial x_{A_j}} \varepsilon_{x_{A_j}} = \sum_{j=1}^{dk} h_{ij} \varepsilon_{x_{A_j}} \quad (10.10)$$

Maticový zápis zákona hromadění skutečných chyb má tvar

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{H}_A \mathbf{E}_A \quad (10.11)$$

kde \mathbf{E}_A je vektor skutečných chyb výchozích parametrů, \mathbf{E}_x je vektor skutečných chyb určovaných parametrů, a \mathbf{H}_A je Jacobiho matice, jejímiž prvky jsou parciální derivace h_{ij} podle rovnice (10.10).

$$\mathbf{E}_A = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{A_1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{A_2}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{A_{dk}}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{A_1}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_{A_1}} & \dots & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_{A_{dk}}} \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

Střední chyba jednotlivého určovaného parametru x_i je nyní dána vztahem

$$m_{x_i}^2 = \sum_{j=1}^{dk} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{A_j}} \right)^2 m_{x_{A_j}}^2 = \sum_{j=1}^{dk} h_{ij}^2 m_{x_{A_j}}^2 \quad (10.13)$$

a vzájemné kovariance mezi parametry jsou

$$m_{x_i x_j}^2 = \sum_{u=1}^{dk} \frac{\partial f_i}{\partial x_{A_u}} \frac{\partial f_j}{\partial x_{A_u}} m_{x_{A_u}}^2 = \sum_{j=1}^{dk} h_{iu} h_{ju} m_{x_{A_u}}^2 \quad (10.14)$$

Maticový zápis zákona hromadění středních chyb je pak - analogicky výrazu (10.8)

$$\mathbf{M}_x^2 = \mathbf{H}_A \mathbf{M}_A^2 \mathbf{H}_A^T \quad (10.15)$$

kde \mathbf{M}_A^2 je kovarianční matice výchozích parametrů vyjadřující jejich přesnost. V praktických případech je tvar této matice závislý na tom, jaká informace o přesnosti výchozích bodů je dispozici. Pokud tyto podklady existují (např. kovarianční matice z vyrovnání vytyčovací sítě), je tato matice obecně plná. Často však je k dispozici pouze střední souřadnicová chyba výchozích bodů $m_{x,y(A)}$ a použije se diagonální tvar této matice

$$\mathbf{M}_A^2 = \begin{bmatrix} m_{x_{A_1}}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{x_{A_2}}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & m_{x_{A_{dk}}}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{diag} [m_{x,y(A)}^2] \quad (10.16)$$

c) zákony souhrnného hromadění skutečných a středních chyb

Souhrnné hromadění skutečných chyb lze popsat algebraickým sloučením maticových výrazů (10.3) a (10.11) takto

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{H}_L \mathbf{E}_L + \mathbf{H}_A \mathbf{E}_A \quad (10.17)$$

Souhrnné hromadění středních chyb lze popsat obdobně sloučením výrazů (10.8) a (10.15)

$$\mathbf{M}_x^2 = \mathbf{H}_L \mathbf{M}_L^2 \mathbf{H}_L^T + \mathbf{H}_A \mathbf{M}_A^2 \mathbf{H}_A^T \quad (10.18)$$

pouze však za předpokladu nezávislosti měřených veličin a určovaných parametrů (souřadnic vytyčovaných bodů). Tento předpoklad nebývá splněn při současném určení výchozích bodů a následném vytyčení (např. metoda přechodných stanovisek)

Využití předcházejících vztahů (10.17) a (10.18) pro praktické rozborů přesnosti polohových vytyčovacích úloh předpokládá výpočet matic parciálních derivací \mathbf{H}_L , \mathbf{H}_A . Existují dvě možnosti výpočtu těchto matic :

- *přímý výpočet* - uplatněním zákona hromadění skutečných chyb, prostřednictvím diferencování funkčních vztahů (10.1). Tento způsob je vhodný, jsou-li příslušné funkční vztahy explicitní, jednoduché a snadno diferencovatelné. Může však narážet na potíže v případě implicitního či složitějšího tvaru funkčních vztahů

- *nepřímý výpočet* - využívá skutečnosti, že jednotlivé měřené veličiny (délky, směry, úhly) mohou být vyjádřeny jako analytické funkce výchozích a určovaných parametrů

$$l_i = g_i(x_{A_1}, x_{A_2}, \dots, x_{A_{dk}}, x_1, x_2, \dots, x_r) \quad (10.19)$$

Pro výpočet diferenciálních změn (skutečných chyb) platí známé vztahy, uvedené např. v [XX]. Jejich tvar je obecně dán vztahem

$$\varepsilon_{l_i} = \sum_{p=1}^{dk} \frac{\partial g_i}{\partial x_{A_p}} \varepsilon_{x_{A_p}} + \sum_{u=1}^r \frac{\partial g_i}{\partial x_u} \varepsilon_{x_u} \quad (10.20)$$

a jejich maticový zápis má tvar

$$\mathbf{E}_L = \mathbf{A} \mathbf{E}_A + \mathbf{B} \mathbf{E}_x \quad (10.21)$$

kde matice \mathbf{A} , \mathbf{B} mají strukturu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{A_1}} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{A_2}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{A_{dk}}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_{A_1}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_{A_1}} & \dots & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_{A_{dk}}} \end{bmatrix}, \quad (10.22)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_r} \end{bmatrix} \quad (10.23)$$

Základní zprostředkující vztahy mezi skutečnými chybami měřených veličin a skutečnými chybami výchozích a určovaných parametrů (souřadnic výchozích a určovaných bodů v rámci příslušné měřické úlohy) jsou

pro délku

$$\varepsilon_{s_{A,B}} = -\cos \alpha_{A,B} \varepsilon_{x_A} - \sin \alpha_{A,B} \varepsilon_{y_A} + \cos \alpha_{A,B} \varepsilon_{x_B} + \sin \alpha_{A,B} \varepsilon_{y_B} \quad (10.24)$$

pro směr

$$\varepsilon_{\alpha_{A,B}} = \frac{\sin \alpha_{A,B}}{s_{A,B}} \varepsilon_{x_A} - \frac{\cos \alpha_{A,B}}{s_{A,B}} \varepsilon_{y_A} - \frac{\sin \alpha_{A,B}}{s_{A,B}} \varepsilon_{x_B} + \frac{\cos \alpha_{A,B}}{s_{A,B}} \varepsilon_{y_B} \quad (10.25)$$

pro úhel

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\omega_{B,A,C}} = & \left(\frac{\sin \alpha_{A,C}}{s_{A,C}} - \frac{\sin \alpha_{A,B}}{s_{A,B}} \right) \varepsilon_{x_A} - \left(\frac{\cos \alpha_{A,C}}{s_{A,C}} - \frac{\cos \alpha_{A,B}}{s_{A,B}} \right) \varepsilon_{y_A} + \\ & + \frac{\sin \alpha_{A,B}}{s_{A,B}} \varepsilon_{x_B} - \frac{\cos \alpha_{A,B}}{s_{A,B}} \varepsilon_{y_B} - \frac{\sin \alpha_{A,C}}{s_{A,C}} \varepsilon_{x_C} + \frac{\cos \alpha_{A,C}}{s_{A,C}} \varepsilon_{y_C} \end{aligned} \quad (10.26)$$

V případě jednoduché měřické úlohy (bez nadbytečných měření) je měřen či vytyčován pouze nezbytný počet veličin, který se rovná počtu určovaných parametrů ($n = r$). Matice \mathbf{B} je v tomto případě čtvercová (rozměru $r \times r$), čehož lze využít k nepřímému výpočtu matic parciálních derivací \mathbf{H}_L , \mathbf{H}_A .

Nejdříve se vztah (10.21) upraví převedením na tvar

$$\mathbf{B} \mathbf{E}_x = -\mathbf{A} \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_L$$

K matici \mathbf{B} existuje inverzní matice \mathbf{B}^{-1} , kterou se tato rovnice zleva vynásobí

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{E}_x = \mathbf{E}_x = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{E}_A + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{E}_L \quad (10.27)$$

a porovnáním s rovnicí (10.17) vyplývá, že zřejmě platí vztahy

$$\mathbf{H}_L = \mathbf{B}^{-1} \quad (10.28)$$

$$\mathbf{H}_A = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \quad (10.29)$$

10.2 Základní metody vytyčení polohy bodu

Jednoduché metody vytyčení polohy bodu jsou takové, kdy je poloha bodu určena pomocí nezbytného počtu (tj. dvou) měřených (vytyčovaných) veličin – bez vyrovnání. Jedná se tedy o pět základních úloh – polární metoda, protínání vpřed z úhlových veličin, protínání z délek, protínání z úhlu a délky a protínání zpět.

Přesnost horizontální polohy se vyjadřuje prostřednictvím prvků kovarianční matice (kapitola 10.2), zjednodušeným ukazatelem přesnosti je střední souřadnicová chyba. Rozeznává se přesnost *relativní* (vzhledem k výchozím bodům) a přesnost *souhrnná* (s uvážením přesnosti výchozích bodů). Oblastí spolehlivosti ($t = 1$) je střední elipsa chyb poskytující informaci o směrech a velikostech maximální a minimální střední chyby. Vztahy mezi prvky kovarianční matice a parametry střední elipsy chyb jsou popsány v kapitole 5.3 – viz. výrazy (5.2), (5.3), (5.4):

10.3 Vytyčení polohy bodu polárními souřadnicemi (rajonem)

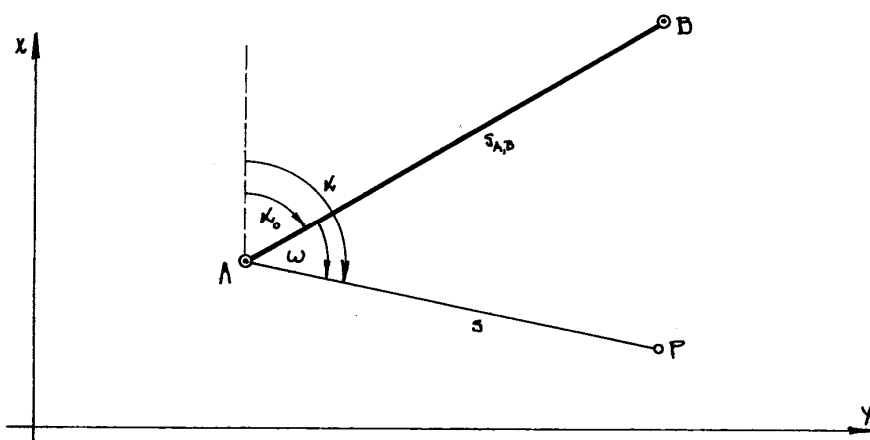
Charakteristika úlohy:

Bod je vytyčován jako průsečík kružnice a orientovaného směru. Kružnice má střed ve výchozím bodě A (polárním stanovisku) a její poloměr se rovná měřené délce s , vytyčovaný směr je orientován nepřímo vzhledem k druhému výchozímu bodu B pomocí měřeného úhlu ω (Obr. 36).

Dané (výchozí body) - A, B (tj. $k = 2$),

Měřené (vytyčované) veličiny – délka s , úhel ω (tj. $n = 2$)

Určované parametry – souřadnice vytyčovaného bodu $P(x, y)$ – (tj. $r = 2$)



Obr. 36 - Vytyčení polohy bodu polárními souřadnicemi

Relativní přesnost polohy vytyčeného bodu:

střední chyby ve směrech souřadnicových os

$$m_x^2 = \cos^2 \alpha m_s^2 + s^2 \sin^2 \alpha m_\omega^2 \quad (10.30)$$

$$m_y^2 = \sin^2 \alpha m_s^2 + s^2 \cos^2 \alpha m_\omega^2 \quad (10.31)$$

kovariance

$$m_{xy} = \sin \alpha \cos \alpha m_s^2 - s^2 \sin \alpha \cos \alpha m_\omega^2 \quad (10.32)$$

střední souřadnicová chyba

$$m_{x,y}^2 = \frac{m_s^2 + s^2 m_\omega^2}{2} \quad (10.33)$$

Ve vzorci (10.33) představuje první člen (m_s) střední chybu *podélnou*, a druhý člen ($s \cdot m_\omega$) střední chybu *příčnou* vzhledem k vytyčovanému směru.

Vliv přesnosti výchozích bodů:

Je-li známa přesnost polohy výchozích bodů, charakterizovaná např. střední souřadnicovou chybou výchozích bodů $m_{x,y(A)}$, bude střední souřadnicová chyba vytyčovaného bodu dána výrazem

$$m_{x,y}^2 = \left(1 - \frac{s}{s_{A,B}} \cos \omega + \frac{s^2}{s_{A,B}^2} \right) m_{x,y(A)}^2 \quad (10.34)$$

Poznámka: Úloha má řešení v celém rozsahu souřadnicové roviny bez omezení. V dnešní praxi charakterizované masovým nasazením totálních stanic jako univerzálních měřících přístrojů je to nejpoužívanější metoda.

10.4 Vytyčení polohy bodu směrovým protínáním

Charakteristika úlohy:

Poloha bodu je získána jako průsečík dvou orientovaných směrů vytyčovaných ze dvou výchozích (daných) bodů. Orientace směrů se získává dvěma způsoby (Obr. 37):

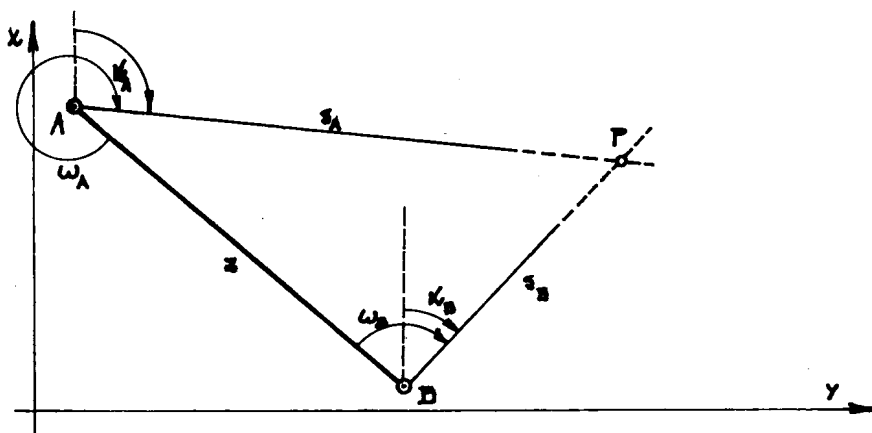
- přímo (astronomická, gyroskopická orientace), nebo nepřímo pomocí jiných daných bodů) – pak jde o *protínání z orientovaných směrů*,
- nepřímo s využitím spojnice obou výchozích bodů – *protínání vpřed z úhlů*.

10.4.1 Vytyčení polohy bodu protínáním vpřed z orientovaných směrů

Dané (výchozí body) - A, B (tj. $k = 2$),

Měřené (vytyčované) veličiny – orientované směry α_A, α_B (tj. $n = 2$)

Určované parametry – souřadnice vytyčovaného bodu $P(x, y)$ – (tj. $r = 2$)



Obr. 37 - Vytyčení polohy bodu protínáním vpřed

Relativní přesnost polohy vytyčeného bodu:

střední chyby ve směrech souřadnicových os

$$m_x^2 = \frac{s_A^2 \cos^2 \alpha_B m_{\alpha_A}^2 + s_B^2 \cos^2 \alpha_A m_{\alpha_B}^2}{\sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} \quad (10.35)$$

$$m_y^2 = \frac{s_A^2 \sin^2 \alpha_B m_{\alpha_A}^2 + s_B^2 \sin^2 \alpha_A m_{\alpha_B}^2}{\sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} \quad (10.36)$$

kovariance

$$m_{xy} = \frac{s_A^2 \sin \alpha_B \cos \alpha_B m_{\alpha_A}^2 + s_B^2 \sin \alpha_A \cos \alpha_A m_{\alpha_B}^2}{\sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} \quad (10.37)$$

střední souřadnicová chyba

$$m_{x,y}^2 = \frac{s_A^2 m_{\alpha_A}^2 + s_B^2 m_{\alpha_B}^2}{2 \sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} \quad (10.38)$$

Zjednodušením těchto vztahů za předpokladu stejné přesnosti měřených délek $m_{\alpha_A} = m_{\alpha_B} = m_\alpha$ přejdou tyto vzorce na tvar

střední chyby ve směrech souřadnicových os

$$m_x^2 = \frac{s_A^2 \cos^2 \alpha_B + s_B^2 \cos^2 \alpha_A}{\sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} m_\alpha^2 \quad (10.39)$$

$$m_y^2 = \frac{s_A^2 \sin^2 \alpha_B + s_B^2 \sin^2 \alpha_A}{\sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} m_\alpha^2 \quad (10.40)$$

kovariance

$$m_{xy} = \frac{s_A^2 \sin \alpha_B \cos \alpha_B + s_B^2 \sin \alpha_A \cos \alpha_A}{\sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} m_\alpha^2 \quad (10.41)$$

střední souřadnicová chyba

$$m_{x,y}^2 = \frac{s_A^2 + s_B^2}{2 \sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} m_\alpha^2 \quad (10.42)$$

Vliv přesnosti výchozích bodů:Je-li známa přesnost polohy výchozích bodů, charakterizovaná např. střední souřadnicovou chybou výchozích bodů $m_{x,y(A)}$, bude střední souřadnicová chyba vytyčovaného bodu dána výrazem

$$m_{x,y}^2 = \frac{m_{x,y(A)}^2}{\sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} \quad (10.43)$$

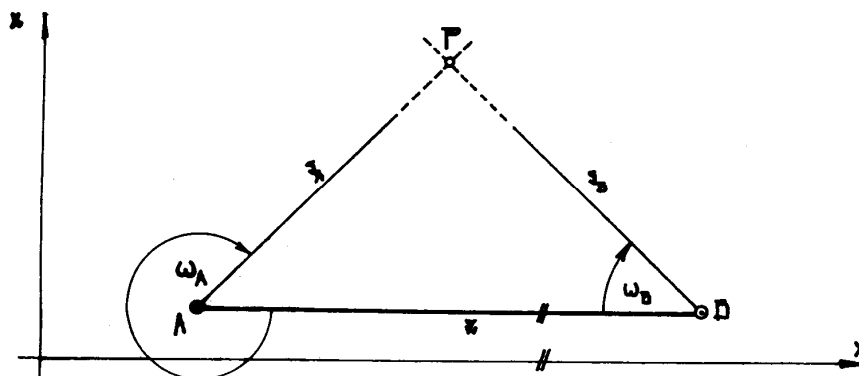
Poznámka: Úloha nemá řešení pro body na přímce procházející výchozími body, kde zřejmě platí $\alpha_B - \alpha_A = 0$.

10.4.2 Vytyčení polohy bodu protínáním vpřed z úhlů

Dané (výchozí body) - A, B (tj. $k = 2$),

Měřené (vytyčované) veličiny – protínací úhly ω_A, ω_B (tj. $n = 2$)

Určované parametry – souřadnice vytyčovaného bodu $P(x, y)$ – (tj. $r = 2$)



Obr. 38 - Vytyčení polohy bodu protínáním vpřed z úhlů

Relativní přesnost polohy vytyčeného bodu:

střední chyby ve směrech souřadnicových os

$$m_x^2 = \frac{s_A^2 \cos^2 \alpha_B m_{\omega_A}^2 + s_B^2 \cos^2 \alpha_A m_{\omega_B}^2}{\sin^2(\omega_A - \omega_B)} \quad (10.44)$$

$$m_y^2 = \frac{s_A^2 \sin^2 \alpha_B m_{\omega_A}^2 + s_B^2 \sin^2 \alpha_A m_{\omega_B}^2}{\sin^2(\omega_A - \omega_B)} \quad (10.45)$$

kovariance

$$m_{xy} = \frac{s_A^2 \sin \alpha_B \cos \alpha_B m_{\omega_A}^2 + s_B^2 \sin \alpha_A \cos \alpha_A m_{\omega_B}^2}{\sin^2(\omega_A - \omega_B)} \quad (10.46)$$

střední souřadnicová chyba

$$m_{x,y}^2 = \frac{s_A^2 m_{\omega_A}^2 + s_B^2 m_{\omega_B}^2}{2 \sin^2(\omega_A - \omega_B)} \quad (10.47)$$

Zjednodušením těchto vztahů za předpokladu stejné přesnosti měřených délek $m_{\omega_A} = m_{\omega_B} = m_{\omega}$ přejdou tyto vzorce na tvar

střední chyby ve směrech souřadnicových os

$$m_x^2 = \frac{s_A^2 \cos^2 \alpha_B + s_B^2 \cos^2 \alpha_A}{\sin^2(\omega_A - \omega_B)} m_{\omega}^2 \quad (10.48)$$

$$m_y^2 = \frac{s_A^2 \sin^2 \alpha_B + s_B^2 \sin^2 \alpha_A}{\sin^2(\omega_A - \omega_B)} m_{\omega}^2 \quad (10.49)$$

kovariance

$$m_{xy} = \frac{s_A^2 \sin \alpha_B \cos \alpha_B + s_B^2 \sin \alpha_A \cos \alpha_A}{\sin^2(\omega_A - \omega_B)} m_\omega^2 \quad (10.50)$$

střední souřadnicová chyba

$$m_{x,y}^2 = \frac{s_A^2 + s_B^2}{2 \sin^2(\omega_A - \omega_B)} m_\omega^2 \quad (10.51)$$

Vliv přesnosti výchozích bodů:

Je-li známa přesnost polohy výchozích bodů, charakterizovaná např. střední souřadnicovou chybou výchozích bodů $m_{x,y(A)}$, bude střední souřadnicová chyba vytyčovaného bodu dána výrazem

$$m_{x,y}^2 = \frac{m_{x,y(A)}^2}{\sin^2(\omega_A - \omega_B)} \quad (10.52)$$

Poznámka: Úloha nemá řešení pro body na přímce procházející výchozími body, kde zřejmě platí $\alpha_B - \alpha_A = 0$.

10.5 Vytyčení polohy bodu délkovým protínáním

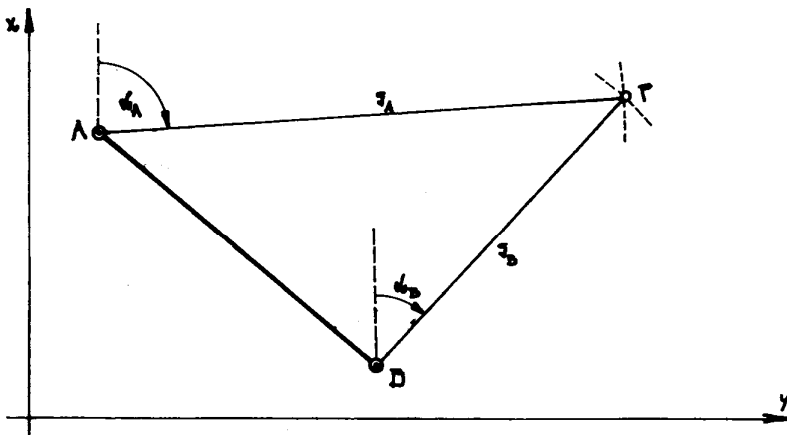
Charakteristika úlohy:

Bod je vytyčován jako průsečík dvou kružnic. Jedna kružnice má střed ve výchozím bodě A a její poloměr se rovná měřené délce s_A , druhá kružnice má střed ve výchozím bodě B a její poloměr se rovná měřené délce s_B (Obr. 39).

Dané (výchozí body) - A, B (tj. $k = 2$),

Měřené (vytyčované) veličiny – délky s_A, s_B (tj. $n = 2$)

Určované parametry – souřadnice vytyčovaného bodu $P(x, y)$ – (tj. $r = 2$)



Obr. 39 - Vytyčení polohy bodu protínáním z délek

Relativní přesnost polohy vytyčeného bodu:

střední chyby ve směrech souřadnicových os

$$m_x^2 = \frac{\sin^2 \alpha_B m_{s_A}^2 + \sin^2 \alpha_A m_{s_B}^2}{\sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} \quad (10.53)$$

$$m_y^2 = \frac{\cos^2 \alpha_B m_{s_A}^2 + \cos^2 \alpha_A m_{s_B}^2}{\sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} \quad (10.54)$$

kovariance

$$m_{xy} = - \frac{\sin \alpha_B \cos \alpha_B m_{s_A}^2 + \sin \alpha_A \cos \alpha_A m_{s_B}^2}{\sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} \quad (10.55)$$

střední souřadnicová chyba

$$m_{x,y}^2 = \frac{m_{s_A}^2 + m_{s_B}^2}{2 \sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} \quad (10.56)$$

Zjednodušením těchto vztahů za předpokladu stejné přesnosti měřených délek $m_{s_A} = m_{s_B} = m_s$ přejdou tyto vzorce na tvar

střední chyby ve směrech souřadnicových os

$$m_x^2 = \frac{\sin^2 \alpha_B + \sin^2 \alpha_A}{\sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} m_s^2 \quad (10.57)$$

$$m_y^2 = \frac{\cos^2 \alpha_B + \cos^2 \alpha_A}{\sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} m_s^2 \quad (10.58)$$

kovariance

$$m_{xy} = - \frac{\sin \alpha_B \cos \alpha_B + \sin \alpha_A \cos \alpha_A}{\sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} m_s^2 \quad (10.59)$$

střední souřadnicová chyba

$$m_{x,y}^2 = \frac{m_s^2}{2 \sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} \quad (10.60)$$

Vliv přesnosti výchozích bodů:Je-li známa přesnost polohy výchozích bodů, charakterizovaná např. střední souřadnicovou chybou výchozích bodů $m_{x,y(A)}$, bude střední souřadnicová chyba vytyčovaného bodu dána výrazem

$$m_{x,y}^2 = \frac{m_{x,y(A)}^2}{\sin^2(\alpha_B - \alpha_A)} \quad (10.61)$$

Poznámka: Úloha nemá řešení pro body na přímce procházející výchozími body, kde zřejmě platí $\alpha_B - \alpha_A = 0$.

10.6 Vytyčení polohy bodu protínáním z úhlu a délky

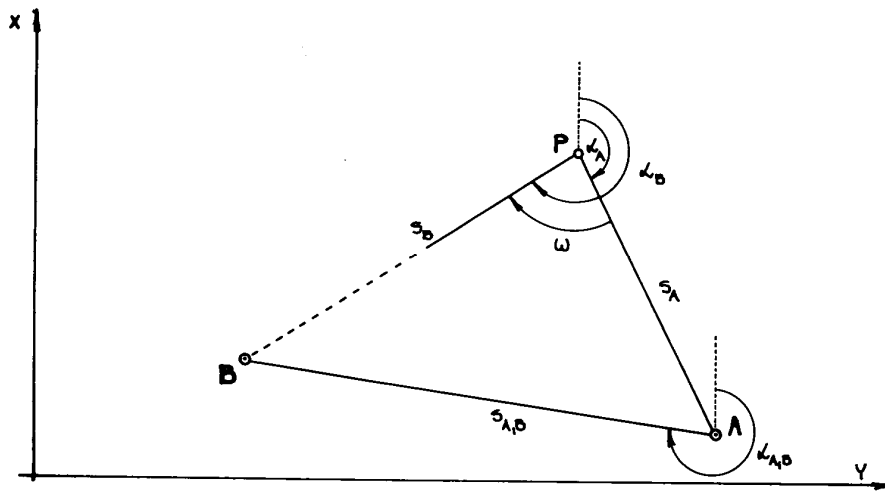
Charakteristika úlohy:

Poloha bodu je získána jako průsečík dvou kružnic. Jedna kružnice má střed ve výchozím bodě A a její poloměr se rovná měřené délce s_A , druhá kružnice je opsána trojúhelníku ABP a obvodový úhel k její tětivě $s_{A,B}$ je měřený úhel ω (Obr. 40).

Dané (výchozí body) - A, B (tj. $k = 2$),

Měřené (vytyčované) veličiny – délka s_A , úhel ω (tj. $n = 2$)

Určované parametry – souřadnice vytyčovaného bodu $P(x, y)$ – (tj. $r = 2$)



Obr. 40 - Vytyčení polohy bodu protínáním z úhlu a délky

Relativní přesnost polohy vytyčeného bodu:

střední chyby ve směrech souřadnicových os

$$m_x^2 = \frac{s_A^2 s_B^2 \sin^2 \alpha_A m_\omega^2 + (s_A \cos \alpha_B - s_B \cos \alpha_A)^2 m_s^2}{(s_B - s_A \cos \omega)^2} \quad (10.62)$$

$$m_y^2 = \frac{s_A^2 s_B^2 \cos^2 \alpha_A m_\omega^2 + (s_A \sin \alpha_B - s_B \sin \alpha_A)^2 m_s^2}{(s_B - s_A \cos \omega)^2} \quad (10.63)$$

kovariance

$$m_{xy} = \frac{-s_A^2 s_B^2 \sin \alpha_A \cos \alpha_A m_\omega^2 + (s_A \sin \alpha_B - s_B \sin \alpha_A)(s_A \cos \alpha_B - s_B \cos \alpha_A) m_s^2}{(s_B - s_A \cos \omega)^2} \quad (10.64)$$

střední souřadnicová chyba

$$m_{x,y}^2 = \frac{s_A^2 s_B^2 m_\omega^2 + s_{A,B}^2 m_s^2}{2(s_B - s_A \cos \omega)^2} \quad (10.65)$$

Vliv přesnosti výchozích bodů:

Je-li známa přesnost polohy výchozích bodů, charakterizovaná např. střední souřadnicovou chybou výchozích bodů $m_{x,y(A)}$, bude střední souřadnicová chyba vytyčovaného bodu dána výrazem

$$m_{x,y}^2 = \frac{s_A^2 + s_B^2 + s_{A,B}^2}{2(s_B - s_A \cos \omega)^2} m_{x,y(A)}^2 \quad (10.66)$$

Poznámka: Úloha nemá řešení pro body na přímce, která je kolmá ke spojnici obou výchozích bodů a prochází výchozím bodem, ke kterému nebyla měřena délka. Na této přímce zřejmě platí $s_B - s_A \cos \omega = 0$ a tečny obou určujících kružnic splývají.

10.7 Vytyčení polohy bodu protínáním zpět

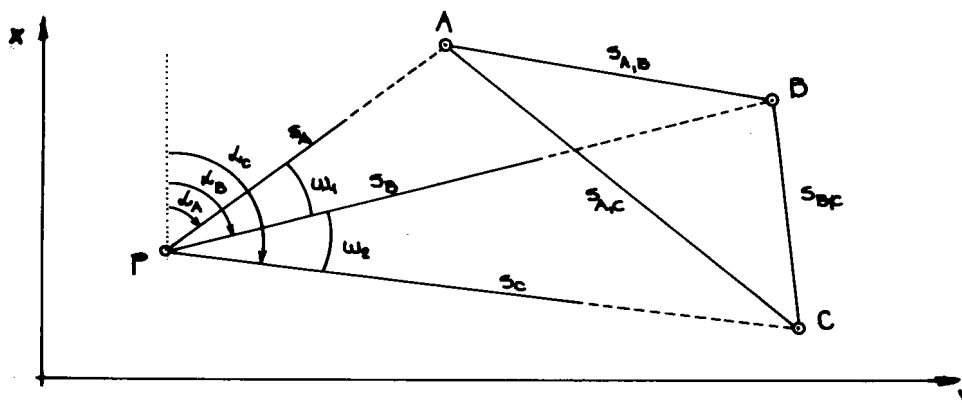
Charakteristika úlohy:

Bod je vytyčován jako průsečík dvou kružnic. Jedna kružnice je opsána trojúhelníku ABP a obvodovým úhlem její tětivy $s_{A,B}$ je měřený úhel ω_1 , druhá kružnice je opsána trojúhelníku BCP a obvodovým úhlem její tětivy $s_{B,C}$ je měřený úhel ω_2 (Obr. 41).

Dané (výchozí body) - A, B, C (tj. $k = 3$),

Měřené (vytyčované) veličiny – úhly ω_1, ω_2 (tj. $n = 2$)

Určované parametry – souřadnice vytyčovaného bodu $P(x, y)$ – (tj. $r = 2$)



Obr. 41 - Vytyčení polohy bodu protínáním zpět

Relativní přesnost polohy vytyčeného bodu:

Při zavedení pomocného značení

$$\begin{aligned} a &= s_B \cos \alpha_C - s_C \cos \alpha_B & d &= s_B \sin \alpha_C - s_C \sin \alpha_B \\ b &= s_A \cos \alpha_C - s_C \cos \alpha_A & e &= s_A \sin \alpha_C - s_C \sin \alpha_A \\ c &= s_A \cos \alpha_B - s_B \cos \alpha_A & f &= s_A \sin \alpha_B - s_B \sin \alpha_A \\ g &= s_A \sin \omega_2 - s_B \sin (\omega_1 + \omega_2) + s_C \sin \omega_1 \end{aligned} \quad (10.67)$$

Ize odvodit následující charakteristiky přesnosti:

střední chyby ve směrech souřadnicových os

$$m_x^2 = \frac{a^2 s_A^2 m_{\omega_1}^2 + c^2 s_C^2 m_{\omega_2}^2}{g^2} \quad (10.68)$$

$$m_y^2 = \frac{d^2 s_A^2 m_{\omega_1}^2 + f^2 s_C^2 m_{\omega_2}^2}{g^2} \quad (10.69)$$

kovariance

$$m_{xy} = \frac{a d s_A^2 m_{\omega_1}^2 + c f s_C^2 m_{\omega_2}^2}{g^2} \quad (10.70)$$

střední souřadnicová chyba

$$m_{x,y}^2 = \frac{s_A^2 (a^2 + d^2) m_{\omega_1}^2 + s_C^2 (c^2 + f^2) m_{\omega_2}^2}{2 g^2}$$

Tento výraz lze ještě zjednodušit výpočtem dvojčlenů v závorkách dosazením z (10.67):

$$\begin{aligned} a^2 + d^2 &= s_B^2 \cos^2 \alpha_C - 2 s_B s_C \cos \alpha_B \cos \alpha_C + s_C^2 \cos^2 \alpha_B + s_B^2 \sin^2 \alpha_C - \\ &\quad - 2 s_B s_C \sin \alpha_B \sin \alpha_C + s_C^2 \sin^2 \alpha_B = \\ &= s_B^2 + s_C^2 - 2 s_B s_C (\cos \alpha_B \cos \alpha_C + \sin \alpha_B \sin \alpha_C) = \\ &= s_B^2 + s_C^2 - 2 s_B s_C \cos(\alpha_C - \alpha_B) = s_{B,C}^2 \end{aligned}$$

Podobným způsobem lze vypočítat dvojčlen $c^2 + f^2 = s_{A,B}^2$. Vzorec pro střední souřadnicovou chybu pak bude mít tvar

$$m_{x,y}^2 = \frac{s_A^2 s_{B,C}^2 m_{\omega_1}^2 + s_C^2 s_{A,B}^2 m_{\omega_2}^2}{2 g^2} \quad (10.71)$$

Zjednodušením těchto vztahů za předpokladu stejné přesnosti měřených úhlů $m_{\omega_1} = m_{\omega_2} = m_\omega$ přejdou tyto vzorce na tvar

střední chyby ve směrech souřadnicových os

$$m_x^2 = \frac{a^2 s_A^2 + c^2 s_C^2}{g^2} m_\omega^2, \quad (10.72)$$

$$m_y^2 = \frac{d^2 s_A^2 + f^2 s_C^2}{g^2} m_\omega^2, \quad (10.73)$$

kovariance

$$m_{xy} = \frac{a d s_A^2 + c f s_C^2}{g^2} m_\omega^2, \quad (10.74)$$

střední souřadnicová chyba

$$m_{x,y}^2 = \frac{s_A^2 s_{B,C}^2 + s_C^2 s_{A,B}^2}{2g^2} m_\omega^2 \quad (10.75)$$

Vliv přesnosti výchozích bodů:

Je-li známa přesnost polohy výchozích bodů, charakterizovaná např. střední souřadnicovou chybou výchozích bodů $m_{x,y(A)}$, bude střední souřadnicová chyba vytyčovaného bodu dána výrazem

$$m_{x,y}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2}{2g^2} m_{x,y(A)}^2 = \frac{s_{A,B}^2 + s_{A,C}^2 + s_{B,C}^2}{2g^2} m_{x,y(A)}^2 \quad (10.76)$$

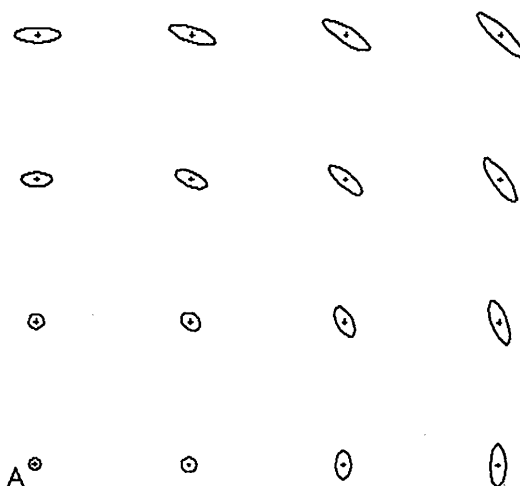
Poznámka:

Úloha nemá řešení, leží-li vytyčovaný bod na kružnici procházející trojicí výchozích (daných) bodů A , B , C , kde zřejmě platí $s_A \sin \omega_2 - s_B \sin(\omega_1 + \omega_2) + s_C \sin \omega_1 = 0$

Praktické použití metody protínání zpět při vytyčování předpokládá postupné přibližování, kdy je nejprve nalezena předběžná poloha vytyčovaného bodu, která se pak v dalším kroku zpřesní.

10.8 Porovnání základních metod vytyčení polohy

Na základě odvozených vztahů pro výpočet přesnosti (kovariančních matic) vytyčovaného bodu lze porovnat vlastnosti a zákonitosti šíření chyb pro jednotlivé metody.

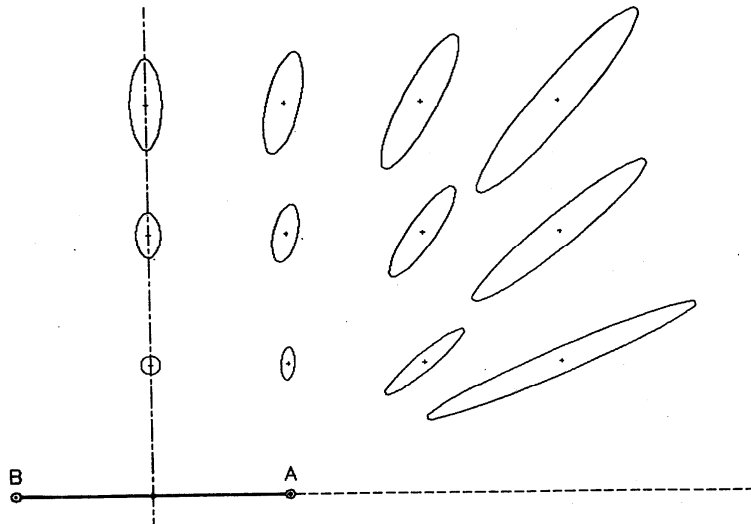


Obr. 42 - Vytyčení polohy bodu polárními souřadnicemi

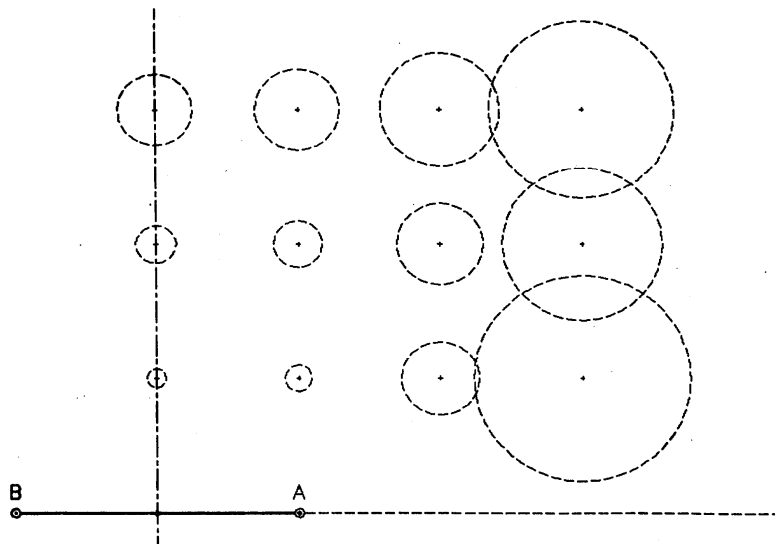
Na Obr. 42 je znázorněno šíření chyb ve formě středních elips chyb bodů pro jeden kvadrant souřadnicové soustavy (situace v ostatních kvadrantech je

stejná) za předpokladu konstantních chyb vytyčovaných délek i úhlů. Jedna z os střední elipsy chyb je vždy natočena do směru polárního stanoviska, velikosti středních elips chyb se zvětšují se vzdáleností vytyčovaného bodu.

Obr. 43 znázorňuje chybovou situaci při vytyčování metodou protínání vpřed za předpokladu stejné přesnosti obou protínacích úhlů. Jsou zde opět vykresleny střední elipsy chyb pro jeden souřadnicový kvadrant (v ostatních kvadrantech je situace symetrická). Je zde dobře vidět změna tvaru (protahování) chybových elips se vzdalováním vytyčovaného bodu od protínací základny AB .

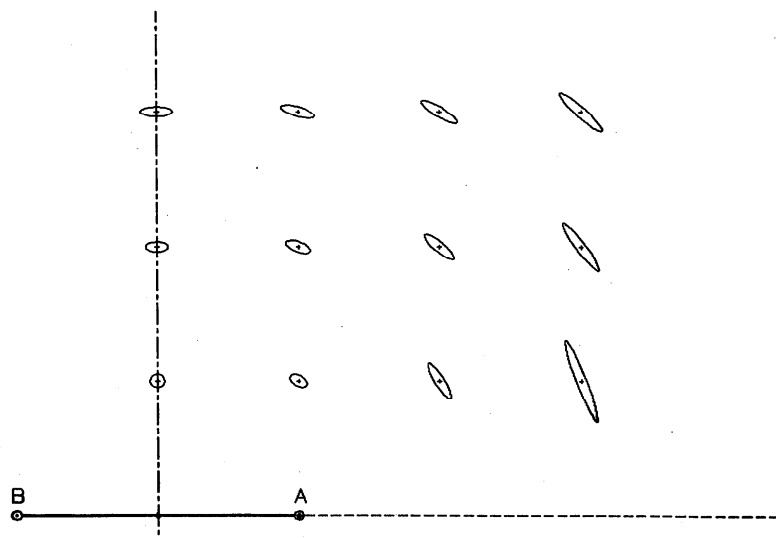


Obr. 43 - Vytyčení polohy bodu protínáním vpřed (střední elipsy chyb)



Obr. 44 - Vytyčení polohy bodu protínáním vpřed (střední souřadnicové chyby)

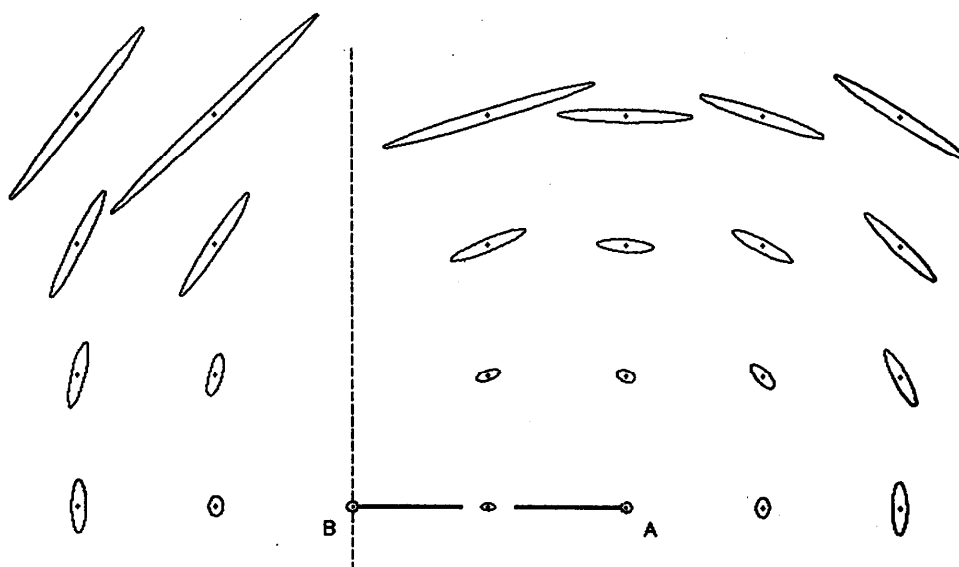
Obr. 44 znázorňuje stejné rozložení chyb prostřednictvím středních souřadnicových chyb vytyčovaných bodů. Příklad názorně ukazuje, že tato přibližná charakteristika přesnosti je tím více zavádějící, čím více se liší velikosti obou poloos chybové elipsy.



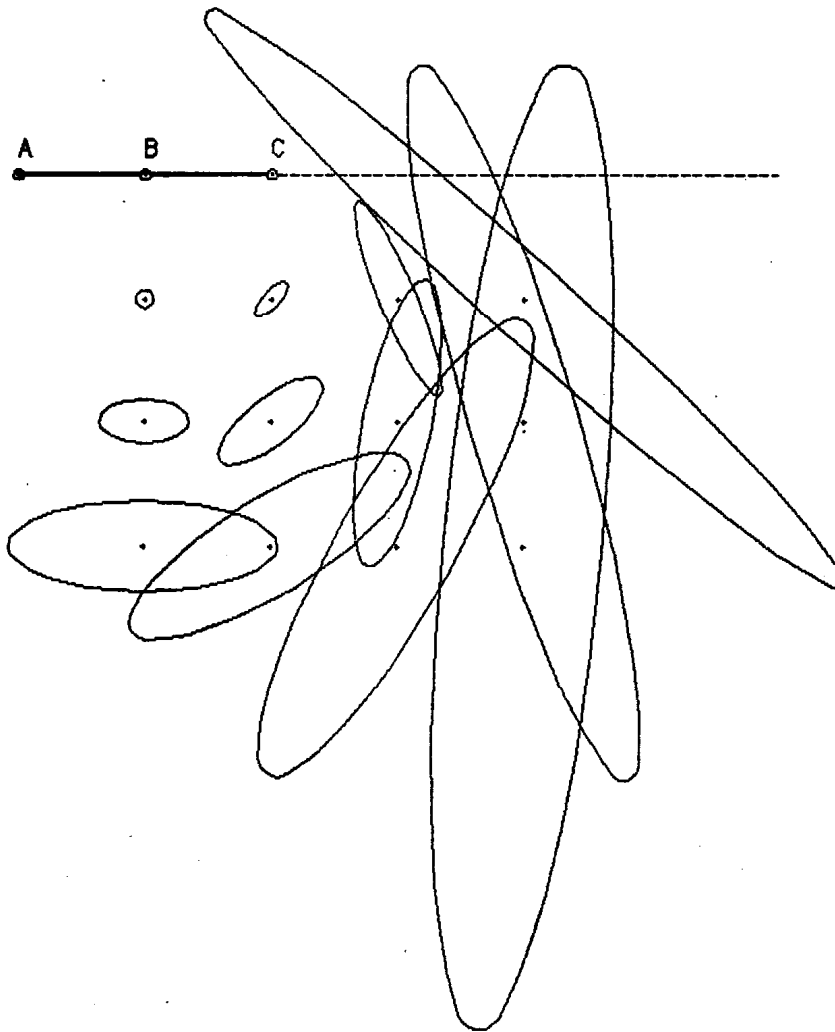
Obr. 45 - Vytyčení polohy bodu protínáním z délek (střední elipsy chyb)

Obr. 45 znázorňuje rozložení přesnosti při vytyčování polohy metodou protínání z délek za předpokladu konstantních chyb délkového měření. Chybové elipsy jsou nyní orientovány kratší osou ve směru protínací základny.

Obr. 46 zachycuje situaci v rozložení chyb pro jednu polovinu souřadnicové roviny při vytyčování polohy metodou protínání z úhlu a délky (s vykreslením přímky na které nemá úloha řešení). Chybové elipsy jsou opět orientovány kratší osou ve směru protínací základny, a navíc se jejich delší osy rychleji zvětšují se vzdalováním vytyčovaného bodu od bodů výchozích



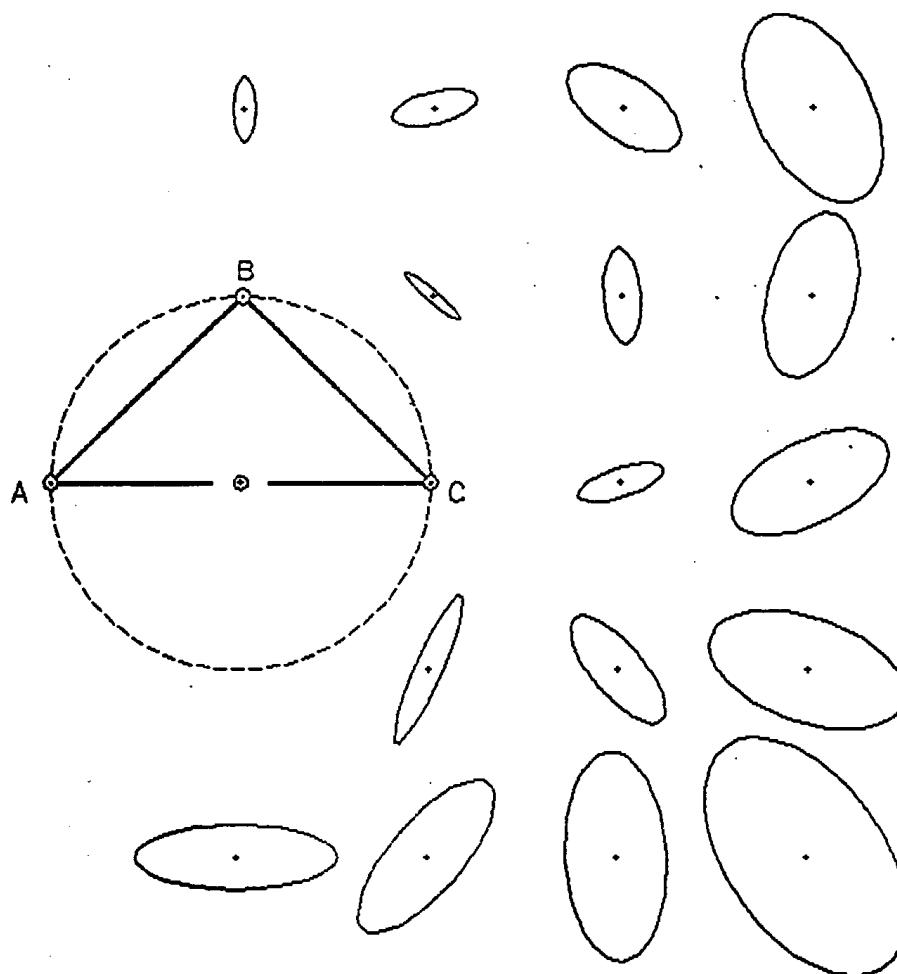
Obr. 46 - Vytyčení polohy bodu protínáním z úhlu a délky (střední elipsy chyb)



Obr. 47 - Vytyčení polohy bodu protínáním zpět (střední elipsy chyb)

Úloha vytyčení polohy bodu protínáním zpět je co do přesnosti značně závislá na konfiguraci výchozích bodů. Obr. 47 znázorňuje rozložení přesnosti (střední elipsy chyb) pro případ výchozích bodů ležících na přímce. Vidíme zde velmi rychlý růst velikosti středních elips chyb se vzdalováním vytyčovaného bodu od bodů výchozích.

Následující Obr. 48 znázorňuje obdobnou situaci s tím rozdílem, že výchozí body nyní tvoří rovnoramenný trojúhelník. Pro body nacházející se v blízkosti těžiště tohoto trojúhelníku je dosahována maximální možná přesnost. Dalším charakteristickým rysem je natáčení delších os chybových elips do tečného směru při přibližování k nebezpečné kružnici opsané trojici výchozích bodů.



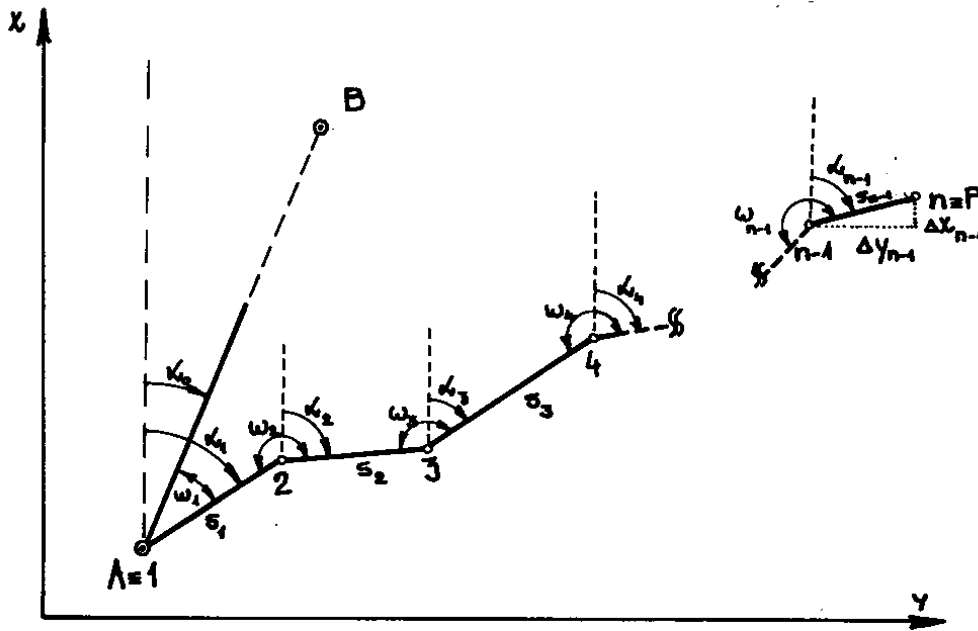
Obr. 48 - Vytyčení polohy bodu protínáním zpět (střední elipsy chyb)

10.9 Jiné metody vytyčení polohy

V inženýrské geodézii se používají další metody, při kterých se určuje poloha vytyčovaného bodu větším než nezbytně nutným počtem měřených veličin. Typické jsou postupy vytyčení polohy pravouhlými souřadnicemi a volným polygonovým pořadem. Dalším zvláštním postupem je průsečíkový způsob vytyčení polohy. V poslední době se rozšiřuje využívání družicových globálních navigačních systémů (GNSS) i pro polohová měření v IG.

10.9.1 Vytyčení polohy bodu volným polygonovým pořadem

Charakteristika úlohy: Bod je vytyčován jako koncový bod volného polygonového pořadu, který vychází z daného (výchozího) bodu a jehož první strana je přímo či nepřímo orientována. Úloha může být interpretována jako „postupný rajon“ (Obr. 49).



Obr. 49 - Vytyčení polohy bodu volným polygonovým pořadem

Při vytyčení polohy bodu volným polygonovým pořadem se pracuje s následujícími daty :

Výchozí data : souřadnice výchozího bodu $A [x_A, y_A]$,
 orientační směrnik α_0 .

Měřené veličiny : vrcholové úhly ω_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$),
 délky stran s_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

Určované parametry : souřadnice vytyčovaného bodu $P [x, y]$

Poloha vytyčeného bodu je určena dvojicí souřadnic x, y podle vztahů (označení veličin viz.Obr. 48)

$$x = x_n = x_A + \sum_{i=1}^{n-1} s_i \cos \alpha_i \quad , \quad (10.77)$$

$$y = y_n = y_A + \sum_{i=1}^{n-1} s_i \sin \alpha_i \quad . \quad (10.78)$$

Skutečné chyby souřadnic se vypočtou diferencováním vztahů (10.77) a (10.78) podle zákona hromadění skutečných chyb

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = & \varepsilon_{x_A} + \cos \alpha_1 \varepsilon_{s_1} + \cos \alpha_2 \varepsilon_{s_2} + \dots + \cos \alpha_{n-1} \varepsilon_{s_{n-1}} - \\ & - s_1 \sin \alpha_1 \varepsilon_{\alpha_1} - s_2 \sin \alpha_2 \varepsilon_{\alpha_2} - \dots - s_{n-1} \sin \alpha_{n-1} \varepsilon_{\alpha_{n-1}} \end{aligned} \quad (10.79)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_y = & \varepsilon_{y_A} + \sin \alpha_1 \varepsilon_{s_1} + \sin \alpha_2 \varepsilon_{s_2} + \dots + \sin \alpha_{n-1} \varepsilon_{s_{n-1}} + \\ & + s_1 \cos \alpha_1 \varepsilon_{\alpha_1} + s_2 \cos \alpha_2 \varepsilon_{\alpha_2} + \dots + s_{n-1} \cos \alpha_{n-1} \varepsilon_{\alpha_{n-1}} \end{aligned}$$

Směrníky jednotlivých stran α_i jsou funkcemi orientačního směrníku a měřených vrcholových úhlů ω_i . Jejich určující vztahy jsou (dle Obr.)

$$\alpha_j = \alpha_0 + \sum_{i=1}^j \omega_i - (j-1) 2R \quad (10.80)$$

a příslušné skutečné chyby

$$\varepsilon_{\alpha_j} = \varepsilon_{\alpha_0} + \varepsilon_{\omega_1} + \varepsilon_{\omega_2} + \dots + \varepsilon_{\omega_j} = \varepsilon_{\alpha_0} + \sum_{i=1}^j \omega_i \quad (10.81)$$

Dosažením těchto vztahů za příslušné skutečné chyby směrníků lze přepsat první rovnici (10.79) na tvar

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = & \varepsilon_{x_A} + \sum_{i=1}^{n-1} \cos \alpha_i \varepsilon_{s_i} - s_1 \sin \alpha_1 \varepsilon_{\alpha_0} - s_1 \sin \alpha_1 \varepsilon_{\omega_1} - \\ & - s_2 \sin \alpha_2 \varepsilon_{\alpha_0} - s_2 \sin \alpha_2 \varepsilon_{\omega_1} - s_2 \sin \alpha_2 \varepsilon_{\omega_2} - \\ & \vdots \\ & - s_{n-1} \sin \alpha_{n-1} \varepsilon_{\alpha_0} - s_{n-1} \sin \alpha_{n-1} \varepsilon_{\omega_1} - \dots - s_{n-1} \sin \alpha_{n-1} \varepsilon_{\omega_{n-1}} \end{aligned}$$

který lze dále upravit na konečný tvar

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x_A} - (y_n - y_1) \varepsilon_{\alpha_0} + \sum_{i=1}^{n-1} \cos \alpha_i \varepsilon_{s_i} - \sum_{i=1}^{n-1} (y_n - y_i) \varepsilon_{\omega_i} \quad (10.82)$$

Obdobným postupem lze odvodit výraz pro skutečnou chybu souřadnice y

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y_A} + (x_n - x_1) \varepsilon_{\alpha_0} + \sum_{i=1}^{n-1} \sin \alpha_i \varepsilon_{s_i} + \sum_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \varepsilon_{\omega_i} \quad (10.83)$$

Uplatněním zákona hromadění středních chyb a kovariancí lze napsat vztahy pro prvky kovarianční matice vytyčeného bodu :

střední chyby jednotlivých souřadnic

$$m_x^2 = m_{x_A}^2 + (y_n - y_1)^2 m_{\alpha_0}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \cos^2 \alpha_i m_{s_i}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (y_n - y_i)^2 m_{\omega_i}^2 \quad (10.84)$$

$$m_y^2 = m_{y_A}^2 + (x_n - x_1)^2 m_{\alpha_0}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sin^2 \alpha_i m_{s_i}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)^2 m_{\omega_i}^2, \quad (10.85)$$

kovariance

$$m_{xy} = -(x_n - x_1)(y_n - y_1) m_{\alpha_0}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sin \alpha_i \cos \alpha_i m_{s_i}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)(y_n - y_i) m_{\omega_i}^2 \quad (10.86)$$

střední souřadnicová chyba

$$m_{x,y}^2 = m_{x,y(A)}^2 + \frac{s_{1,n}^2}{2} m_{\alpha_0}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} m_{s_i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} s_{i,n}^2 m_{\omega_i}^2 \quad (10.87)$$

V praktických případech jsou často splněny podmínky stejné úrovně přesnosti měření délek stran pořadu ($m_{s_1} \approx m_{s_2} \approx \dots \approx m_{s_{n-1}} = m_s$) a stejné úrovně přesnosti měření vrcholových úhlů ($m_{\omega_1} \approx m_{\omega_2} \approx \dots \approx m_{\omega_{n-1}} = m_\omega$) a předcházející vzorce pak přejdou na tvar :

střední chyby jednotlivých souřadnic

$$m_x^2 = m_{x_A}^2 + (y_n - y_1)^2 m_{\alpha_0}^2 + m_s^2 \sum_{i=1}^{n-1} \cos^2 \alpha_i + m_\omega^2 \sum_{i=1}^{n-1} (y_n - y_i)^2 \quad (10.88)$$

$$m_y^2 = m_{y_A}^2 + (x_n - x_1)^2 m_{\alpha_0}^2 + m_s^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sin^2 \alpha_i + m_\omega^2 \sum_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)^2 \quad (10.89)$$

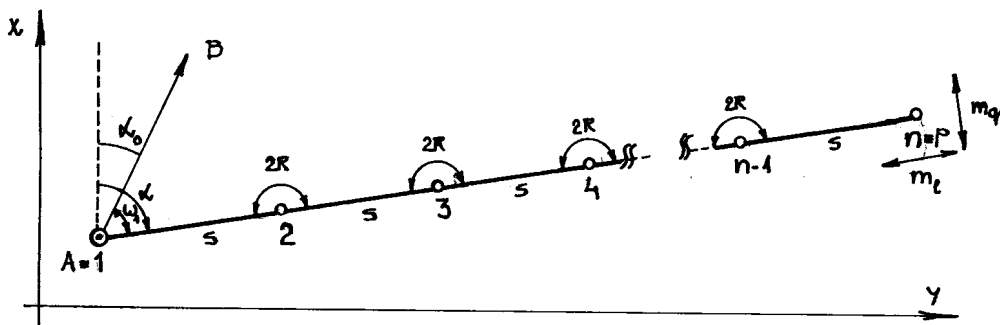
kovariance

$$m_{xy} = -(x_n - x_1)(y_n - y_1) m_{\alpha_0}^2 + m_s^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sin \alpha_i \cos \alpha_i - m_\omega^2 \sum_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)(y_n - y_i) \quad (10.90)$$

střední souřadnicová chyba

$$m_{x,y}^2 = m_{x,y(A)}^2 + \frac{s_{1,n}^2}{2} m_{\alpha_0}^2 + \frac{n-1}{2} m_s^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \sum_{i=1}^{n-1} s_{i,n}^2 \quad (10.91)$$

Zvláštním případem tohoto typu polygonového pořadu je přímý pořad, kde hodnoty vrcholových úhlů $\omega_i = 2R$ pro $i \geq 2$. Jestliže navíc platí další podmínka $s_1 = s_2 = \dots = s_{n-1} = s$, jedná se o pořad rovnostranný (Obr. 50).



Obr. 50 - Vytyčení polohy bodu přímým volným polygonovým pořadem

Pro takový tvar volného polygonového pořadu lze odvodit jednodušší vztahy pro přesnost koncového bodu pořadu v podélném a příčném směru :

skutečná chyba podélná (ve směru pořadu)

$$\varepsilon_l = \varepsilon_{s_1} + \varepsilon_{s_2} + \dots + \varepsilon_{s_{n-1}} = \sum_1^{n-1} \varepsilon_{s_i} \quad (10.92)$$

střední chyba příčná (kolmo ke směru pořadu)

$$\begin{aligned} \varepsilon_q &= s \varepsilon_{\omega_1} + s(\varepsilon_{\omega_1} + \varepsilon_{\omega_2}) + s(\varepsilon_{\omega_1} + \varepsilon_{\omega_2} + \varepsilon_{\omega_3}) + \dots + \\ &+ s(\varepsilon_{\omega_1} + \varepsilon_{\omega_2} + \dots + \varepsilon_{\omega_{n-1}}) = \\ &= s[(n-1)\varepsilon_{\omega_1} + (n-2)\varepsilon_{\omega_2} + \dots + \varepsilon_{\omega_{n-1}}] = s \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\varepsilon_{\omega_i} \end{aligned} \quad (10.93)$$

Za předpokladu stejné úrovně přesnosti měření délek stran s a vrcholových úhlů ω_i jsou pak střední chyby dány výrazy

střední chyba podélná

$$m_l^2 = (n-1)^2 m_s^2 \quad (10.94)$$

střední chyba příčná

$$m_q^2 = s^2 m_\omega^2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 \quad (10.95)$$

kteřou lze sečtením číselné řady upravit na konečný tvar

$$m_q^2 = s^2 m_\omega^2 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \quad (10.96)$$

Pro pořady s počtem vrcholů $n > 6$ lze použít bez podstatné újmy na přesnosti ještě jednodušší vzorec pro střední chybu příčnou ve tvaru

$$m_q^2 = s^2 m_\omega^2 \frac{(n-1)^3}{\sqrt{7}} = \frac{n-1}{\sqrt{7}} L^2 m_\omega^2 \quad (10.97)$$

kde $L = s(n-1)$ je celková délka pořadu.

V praktických případech často nebývá splněn předpoklad stejných délek stran pořadu. Pak je obvyklé dosazovat za s průměrnou délku strany

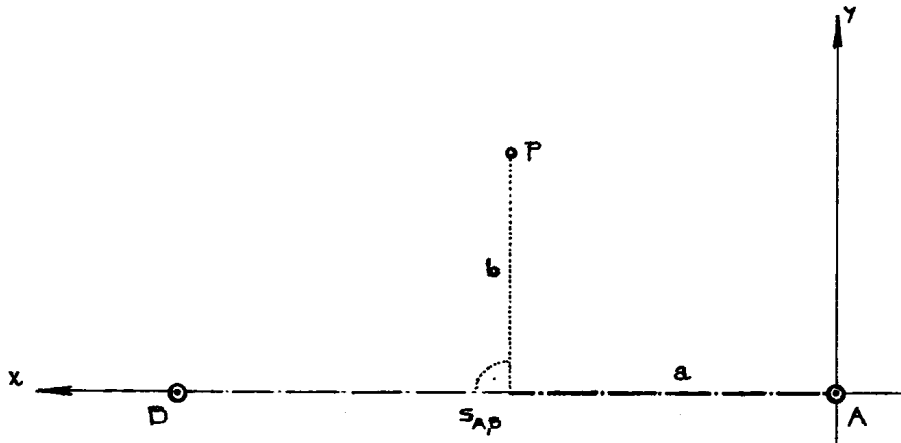
$$s = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} s_i}{n-1}$$

Poznámka : V inženýrskogeodetické praxi se volné polygonové pořady používají zejména při ražbě tunelů a jiných podzemních inženýrských staveb, kde jsou omezené možnosti připojení a orientace. Analýza odvozených vzorců pro rozbor přesnosti polohy bodu vytyčeného volným polygonovým pořadem ukazuje, že chyby rostou se zvětšující se délkou pořadu. Pokud je alespoň přibližně splněn předpoklad přímosti pořadu, pak je pro velikost podélné chyby na konci pořadu rozhodující přesnost délkového měření a pro velikost příčné chyby je rozhodující přesnost úhlového měření. Pro předběžné orientační rozbor přesnosti se dají velmi dobře použít vzorce pro přímý rovnostranný pořad. Jsou-li kladeny zvýšené požadavky na přesnost vytyčení v příčném směru, doporučuje se použití trojpodstavcové soupravy pro omezení vlivu centračních chyb (důlní proražkové pořady apod.). Při vysokých nárocích na

spolehlivost se některé strany pořadu orientují pomocí gyroteodolitu (např. podzemní poly gonové pořady při stavbě metra aj.)

10.9.2 Vytyčení polohy bodu pravouhlými souřadnicemi

Charakteristika úlohy: Bod je vytyčován jako koncový bod kolmice dané délky, která se vztyčí v dané hodnotě staničení k výchozí měřické přímce – spojnici dvou daných stabilizovaných bodů (Obr. 51).



Obr. 51 - Vytyčení polohy bodu pravouhlými souřadnicemi

Při vytyčení polohy bodu pravouhlými souřadnicemi od měřické přímky dané dvojicí výchozích bodů A , B jsou čtyřmi měřenými (vytyčoványými) veličinami

a - délka staničení,

b - délka kolmice,

μ - zařazení bodu P' do přímky (vytyčuje se v hodnotě $\mu = 0$),

ω - úhel kolmice vůči výchozí přímce (vytyčuje se v hodnotách

$\omega = 90^\circ$ pro kolmici vpravo a $\omega = 270^\circ$ pro kolmici vlevo)

Poloha vytyčeného bodu je určena dvojicí souřadnic x , y podle vztahů

$$x = x_A + a \cos(\alpha_{A,B} + \mu) + b \cos(\alpha_{A,B} + \mu + \omega - 2R) \quad (10.98)$$

$$y = y_A + a \sin(\alpha_{A,B} + \mu) + b \sin(\alpha_{A,B} + \mu + \omega - 2R) \quad (10.99)$$

Skutečné chyby souřadnic se vypočtou diferencováním těchto vztahů podle zákona hromadění skutečných chyb

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = & \varepsilon_{x_A} - a \sin(\alpha_{A,B} + \mu) (\varepsilon_{\alpha_{A,B}} + \varepsilon_\mu) - \\ & - b \sin(\alpha_{A,B} + \mu + \omega - 2R) (\varepsilon_{\alpha_{A,B}} + \varepsilon_\mu + \varepsilon_\omega) + \\ & + \cos(\alpha_{A,B} + \mu) \varepsilon_a + \cos(\alpha_{A,B} + \mu + \omega - 2R) \varepsilon_b \end{aligned} \quad (10.100)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \varepsilon_{y_A} + a \cos(\alpha_{A,B} + \mu) (\varepsilon_{\alpha_{A,B}} + \varepsilon_\mu) + \\ &+ b \cos(\alpha_{A,B} + \mu + \omega - 2R) (\varepsilon_{\alpha_{A,B}} + \varepsilon_\mu + \varepsilon_\omega) + \\ &+ \sin(\alpha_{A,B} + \mu) \varepsilon_a + \sin(\alpha_{A,B} + \mu + \omega - 2R) \varepsilon_b\end{aligned}\quad (10.101)$$

Pro další odvozování je účelné uvažovat zvláštní volbu souřadnicové soustavy podle Obr. 51 (osa x je vložena do přímky AB a tedy $\alpha_{A,B} = 0$). Dále pak s uvažováním $\mu = 0$ a $\omega = 90^\circ, 270^\circ$ (pro kolmici vpravo resp. vlevo) lze po dosazení přepsat rovnice pro skutečné chyby na následující tvar

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_{x_A} \pm b (\varepsilon_{\alpha_{A,B}} + \varepsilon_\mu + \varepsilon_\omega) + \varepsilon_a \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{y_A} + a (\varepsilon_{\alpha_{A,B}} + \varepsilon_\mu) \mp \varepsilon_b\end{aligned}$$

a po zavedení vztahu pro skutečnou chybu směrníku výchozí přímky

$$\varepsilon_{\alpha_{A,B}} = \frac{\varepsilon_{y_B} - \varepsilon_{y_A}}{s_{A,B}}$$

dostanou tyto rovnice konečný tvar

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x_A} \pm \frac{b}{s_{A,B}} (\varepsilon_{y_B} - \varepsilon_{y_A}) + \varepsilon_a \pm b (\varepsilon_\mu + \varepsilon_\omega) \quad (10.102)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \varepsilon_{y_A} + \frac{a}{s_{A,B}} (\varepsilon_{y_B} - \varepsilon_{y_A}) \mp \varepsilon_b + a \varepsilon_\mu = \\ &= \left(1 - \frac{a}{s_{A,B}}\right) \varepsilon_{y_A} + \frac{a}{s_{A,B}} \varepsilon_{y_B} \mp \varepsilon_b + a \varepsilon_\mu\end{aligned}\quad (10.103)$$

Uplatněním zákona hromadění středních chyb pak lze napsat vztahy pro střední chyby jednotlivých souřadnic vytyčeného bodu

$$m_x^2 = m_{x_A}^2 \pm \frac{b^2}{s_{A,B}^2} (m_{y_A}^2 + m_{y_B}^2) + m_a^2 \pm b^2 (m_\mu^2 + m_\omega^2) \quad (10.104)$$

$$m_y^2 = \left(1 - \frac{a}{s_{A,B}}\right)^2 m_{y_A}^2 + \frac{a^2}{s_{A,B}^2} m_{y_B}^2 + m_b^2 + a^2 m_\mu^2 \quad (10.105)$$

Kovariance je dána výrazem

$$m_{xy}^2 = \pm \left(1 - \frac{a}{s_{A,B}}\right) \frac{b}{s_{A,B}} m_{y_A}^2 \pm \frac{ab}{s_{A,B}^2} m_{y_B}^2 \pm ab m_\mu^2 \quad (10.106)$$

Střední souřadnicová chyba pak je

$$\begin{aligned}m_{x,y}^2 &= \frac{1}{2} \left[m_{x_A}^2 \pm \left(1 - \frac{2a}{s_{A,B}} + \frac{a^2 + b^2}{s_{A,B}^2}\right) m_{y_A}^2 + \frac{a^2 + b^2}{s_{A,B}^2} m_{y_B}^2 + m_a^2 + m_b^2 + \right. \\ &\left. + (a^2 + b^2) m_\mu^2 + b^2 m_\omega^2 \right]\end{aligned}\quad (10.107)$$

Uvažují-li se odděleně vliv vytyčení a vliv výchozích prvků, pak platí:

Relativní přesnost:

střední chyby jednotlivých souřadnic

$$m_x^2 = m_a^2 \pm b^2 (m_\mu^2 + m_o^2) \quad (10.108)$$

$$m_y^2 = m_b^2 + a^2 m_\mu^2 \quad (10.109)$$

kovariance

$$m_{xy}^2 = abm_\mu^2 \quad (10.110)$$

Vliv přesnosti výchozích bodů:

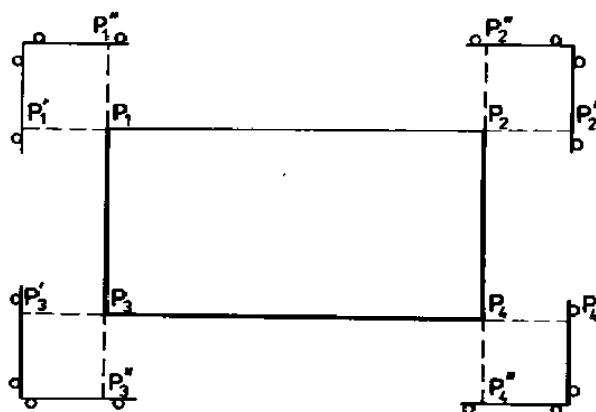
Je-li známa přesnost polohy výchozích bodů, charakterizovaná např. střední souřadnicovou chybou výchozích bodů $m_{x,y(A)}$, bude střední souřadnicová chyba vytyčovaného bodu dána výrazem

$$m_{x,y}^2 = \left(1 - \frac{a}{s_{A,B}} + \frac{a^2 + b^2}{s_{A,B}^2} \right) m_{x,y(A)}^2 \quad (10.111)$$

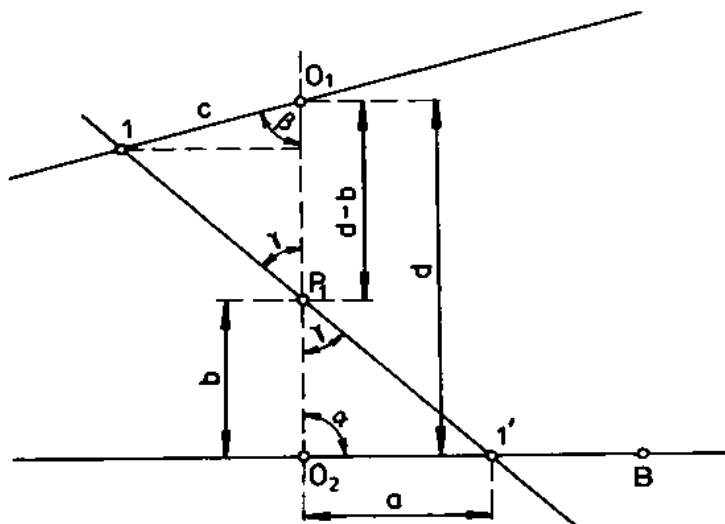
Poznámka: Metoda vytyčení polohy pravouhlými souřadnicemi se v praxi používá ve dvou variantách. Běžná varianta má krátký dosah a používá vytyčovací hranol (pentagon) a pásmo. Přesná varianta pracuje s teodolitem a komparovaným pásmem či dálkoměrem – zde se využijí odvozené vztahy pro rozbor přesnosti.

10.9.3 Vytyčení polohy bodu průsečíkovým způsobem

Charakteristika úlohy: Jedná se o zvláštní způsob vytyčení polohy bodu jako průsečíku dvou přímek daných spojnicemi stabilizovaných bodů. Používá se tam, kde je třeba usnadnit provádění opakovaného přesného polohového vytyčení. Jednoduchým příkladem jsou stavební lavičky (Obr. 52). Důležitější je uplatnění při stavbě složitých základových konstrukcí staveb a zvláště v mostním stavitelství (Obr. 53).



Obr. 52 - Stavební lavičky



Obr. 53 - Průsečková metoda při stavbě mostů

Při zřizování stabilizací koncových bodů přímky $1 - 1'$ se vychází ze znalosti vzdálenosti d obou bodů O_1, O_2 v ose mostu a z projektované hodnoty staničení b vytyčovaného bodu. Na jedné straně mostu se zřídí stabilizace bodu 1 a změří se jeho vzdálenost c od bodu O_1 , jakož i úhel β . Pak je možné vypočítat úhel obou přímek γ podle vzorce

$$\cot g \gamma = \frac{d - b - c \cos \beta}{c \sin \beta} \quad (10.112)$$

Na druhé straně mostu se pak ve směru z bodu O_2 daným úhlem α vytyčí vzdálenost a vypočtená z výrazu

$$a = b \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (10.113)$$

Rozbor přesnosti vytyčení polohy bodu průsečkovou metodou předpokládá nejistotu polohy pouze v podélném směru (staničení), zatímco v příčném směru je bod zařazován např. metodou záměrné přímky s výrazně vyšší přesností.

Odvození je možné vykonat za splnění podmínky $\alpha \approx \beta \rightarrow 90^\circ$, což je předpoklad v praxi zpravidla splněný. Pak lze vyjít ze vztahu

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{a + c} \Rightarrow b = \frac{ad}{a + c}$$

Diferencováním tohoto vztahu podle proměnných a, c se získá vztah pro skutečnou chybu staničení b

$$\varepsilon_b = \frac{cd}{(a+c)^2} \varepsilon_a - \frac{ad}{(a+c)^2} \varepsilon_c = \frac{\cot g \gamma}{a+c} (c \varepsilon_a - a \varepsilon_c) \quad (10.114)$$

a po přechodu na střední chybu

$$m_b^2 = \frac{\cot g^2 \gamma}{(a+c)^2} (c^2 m_a^2 + a^2 m_c^2) \quad (10.115)$$

Tento výraz za předpokladu stejné přesnosti délkového měření $m_a = m_c = m_s$ získá tvar

$$m_b^2 = \frac{\cot g^2 \gamma}{(a+c)^2} (c^2 + a^2) m_s^2 \quad (10.116)$$

Poznámka: Vzdálenosti a , c bývá často výhodné měřit paralakticky. Doporučuje se, aby hodnota úhlu γ neklesla pod 20 gon.

10.9.4 Vytyčení polohy bodu pomocí GNSS

Globální navigační družicové systémy (GNSS) jsou v používání zhruba od počátku osmdesátých let minulého století, kdy začal fungovat americký systém GPS. K němu později přibyl ruský systém GLONASS a v současnosti je v poslední fázi příprav spuštění evropský civilní systém GALILEO.

Jedná se o systémy poskytující údaje o 3D poloze v globálním geocentrickém prostorovém souřadnicovém systému v *navigačním režimu* (měření s jedním přístrojem) s přesností několika metrů (vůči geocentru). Měří-li se však v *diferenciálním režimu* (současné měření dvěma aparaturami), lze relativní polohu (složky vektoru spojnice obou bodů) určit s mnohem vyšší přesností několika milimetrů (v závislosti na použité metodě měření). Signál je přenášen na dvou nosných frekvencích (L1, L2). Měření GNSS je ovlivněno zemskou atmosférou (ionosféra, troposféra) a více systematickými faktory (chyby hodin přijímače a družice, excentricity fázových center antén, vícecestné šíření signálu aj.). Dosahovaná přesnost závisí též na aktuální konfiguraci družic vůči přijímači vyjadřované číselným faktorem snížení přesnosti (DOP). Podrobnější informace o struktuře a funkci systémů GNSS lze nalézt např. v [16], [19] aj.

V inženýrské geodézii se pro určování polohy bodů v současnosti využívá především systém GPS, ačkoliv existují i společné GPS+GLONASS aparatury. Používají se následující diferenciální metody:

- **statická m.** – používá se pro budování vytyčovacích sítí vysoké přesnosti a při měření posunů (relativní střední souřadnicová chyba 1 – 5 mm),
- **rychlá statická m.** – používá se pro určování polohy bodů a pro budování vytyčovacích sítí (relativní střední souřadnicová chyba 5 – 10 mm),
- **stop & go m.** – při kontrolních měřeních, při pořizování dokumentace ukončené výstavby (zvl. liniové stavby), při měření přetvoření staticky a dynamicky zatěžovaných konstrukcí (relativní střední souřadnicová chyba 10 – 15 mm),
- **kinematická m.** – při kontrole geometrických parametrů staveb (relativní střední souřadnicová chyba 10 – 20 mm),
- **kinematická m. v reálném čase (RTK)** – vytyčování, ověřovací a kontrolní měření (relativní střední souřadnicová chyba 15 – 25 mm).

11 Závěr

11.1 Shrnutí



Předkládaný studijní text je věnován základní problematice inženýrské geodézie. Je zaměřen více teoreticky a podává systematický přehled metod rozborů přesnosti měření a vytyčení od jednoduchých veličin až po analýzu přesnosti vytyčení polohy bodu v souřadnicové rovině. Jsou zde vysvětleny základní pojmy a souvislosti, a rovněž metodika základních vytyčovacích úloh.

11.2 Studijní prameny

11.2.1 Seznam použité literatury



- [1] Michalčák, O., Vosika, O., Veselý, M., Novák, Z. *Inžinierska geodézia I*. Alfa, Bratislava 1985
- [2] Michalčák, O., Vosika, O., Veselý, M., Novák, Z. *Inžinierska geodézia II*. Alfa, Bratislava 1990
- [3] Švábenský, O., Vitula, A. *Inženýrská geodézie. Návody ke cvičením I*. VUT Brno, 1993
- [4] Švábenský, O., Vitula, A. *Inženýrská geodézie. Návody ke cvičením II*. VUT Brno, 1991
- [5] ČSN 73 0420-1 Přesnost vytyčování staveb – Část 1: Základní požadavky. ČNI, Praha 2002
- [6] ČSN 73 0420-2 Přesnost vytyčování staveb – Část 1: Vytyčovací odchylky. ČNI, Praha 2002
- [7] ČSN 73 0202 Geometrická přesnost ve výstavbě. Základní ustanovení. ČNI, Praha 1995
- [8] ČSN 73 0212-1 Geometrická přesnost ve výstavbě. Kontrola přesnosti. Část 1: Základní ustanovení. ČNI, Praha 1996
- [9] ČSN 73 0212-3 Geometrická přesnost ve výstavbě. Kontrola přesnosti. Část 3: Pozemní stavební objekty. ČNI, Praha 1997
- [10] ČSN 73 0212-4 Geometrická přesnost ve výstavbě. Kontrola přesnosti. Část 4: Liniové stavební objekty. ČNI, Praha 1997
- [11] ČSN 73 0212-5 Geometrická přesnost ve výstavbě. Kontrola přesnosti. Část 5: Kontrola přesnosti stavebních dílců. ČNI, Praha 1994
- [12] ČSN 73 0212-6 Geometrická přesnost ve výstavbě. Kontrola přesnosti. Část 6: Statistická analýza a přejímka. ČNI, Praha 1993
- [13] ČSN 73 0212-7 Geometrická přesnost ve výstavbě. Kontrola přesnosti. Část 7: Statistická regulace. ČNI, Praha 1994
- [14] Krumphanzl, V. *Inženýrská geodézie I. Základy vytyčovacích prací*. SNTL, Praha 1966

- [15] Krumphanzl, V., Michalčák, O. *Inženýrská geodézie II. Kartografie*, Praha 1975
- [16] Švábenský, O., Fixel, J., Weigel, J. *Základy GPS a jeho praktické aplikace*. CERM, Brno 1995

11.2.2 Seznam doplňkové studijní literatury

- [17] Richardus, P. *Project Surveying*, A.A.Balkema Rotterdam, 1984
- [18] Mueller, W.: *Ingenieurgeodäsie*, VB Berlin, 1984.
- [19] Hofmann-Wellenhof, B., Kienast, G., Lichtenegger, H. *GPS in der Praxis*. Springer, Wien 1994
- [20] Irvine, W. *Surveying for Construction*. McGraw-Hill, Glasgow 1995



11.2.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny

- [21] <http://www.vugtk.cz/nzk/indnzk.html>
- [22] <http://www.vugtk.cz/odis/index1.html>
- [23] <http://knihovny.cvut.cz/sluzby/fsv/index.html>
- [24] <http://library.fce.vutbr.cz/>

